Dr. Kloknicer Imre
Villamosgépek melegedése
2008.

Jellemezzük a villamosgépet az alábbi paramétereivel:

- m, a tömege
- c, a fajhője
- P_{veszt}, a keletkezett összes hő veszteség (a vas- és tekercsveszteségek összege)
- A, a hő leadó felület
- h, a hőátadási tényező
- t, az idő
- ϑ, a hőmérséklete a környezethez képest (!)

Az alap egyenlet:

$$P_{veszt} * dt = c * m * d\vartheta + A * h * \vartheta * dt$$

A baloldalon a keletkező hőmennyiség van, a jobb oldal első tagja, amivel a gép melegszik, a másik, amennyi hőt átad a környezetének. Ha minden keletkező hőt átadja a környezetének, tovább nem melegszik, ekkor a hőmérséklete $\vartheta_{\max}$.

Alakítsuk át az egyenletet differenciális formára

$$P_{veszt} = c * m * \frac{d\vartheta}{dt} + A * h * \vartheta$$

Osszuk el minkét oldalt A*h-val: $\frac{P_{veszt}}{A * h} = \frac{c * m}{A * h} * \frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\vartheta_{\max} = \frac{P_{veszt}}{A * h} \text{ és } T = \frac{c * m}{A * h}$$

Így $\vartheta_{\max} = T * \frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta$

Kicsit átalakítva és differenciális formára hozva $(\vartheta_{\max} - \vartheta) * dt = T * d\vartheta$

Innen $\frac{1}{T} dt = \frac{1}{(\vartheta_{\max} - \vartheta)} d\vartheta$

Integrálva

$$\frac{1}{T}\int dt = \int \frac{1}{(\vartheta_{\max} - \vartheta)} d\vartheta$$

Az integrálási konstans legyen $\ln B$, ekkor

$$\frac{t}{T} = -\ln(\vartheta_{\max} - \vartheta) + \ln B$$

Kicsit átalakítva

$$-\frac{t}{T} + \ln B = \ln(\vartheta_{\max} - \vartheta)$$

Mindkét oldal e-adra emelve

$$B * e^{-\frac{t}{T}} = \vartheta_{\max} - \vartheta$$

Azaz

$$\vartheta = \vartheta_{\max} - B * e^{-\frac{t}{T}}$$

Vizsgáljuk $\vartheta(t)$ függvényt a kinduláskor

$\vartheta(0) = 0$, mert megegyezik a gép hőmérséklete a környezetével, így

$$\vartheta = \vartheta_{\max} - B * e^{-\frac{0}{T}} = \vartheta_{\max} - B = 0$$

Tehát

$$B = \vartheta_{\max}$$

Visszahelyettesítve kapjuk a végeredményt

$$\vartheta = \vartheta_{\max} - \vartheta_{\max} * e^{-\frac{t}{T}} = \vartheta_{\max}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$