Boole-féle megbízhatósági modell

A rendszer **véges számú** alkatrészt tartalmaz.

A rendszer alkatrészei egymástól **sztochasztikusan függetlenek**, azaz meghibásodásaik nincsenek egymással korrelációban.

A rendszer alkatrészei, és a teljes rendszer is **csak két lehetséges állapotban** lehet:

- működőképes, vagy
- meghibásodott.

Az előbbiből adódóan közbenső állapotok nem modellezhetők (pl. egy tartalék elem meghibásodik, amikor még a fő elem működik).

Monotónia-tulajdonság: egy már meghibásodott alkatrész további alkatrészek meghibásodása következtében nem válik ismét működőképessé.

A modell számításainál a **Boole-algebra** szabályai alkalmazhatók.

Matematikai modellezés

Alapok

Legyen x_i az E_i rendszerelemhez rendelt logikai változó, ahol

- $x_i = 1$, ha az elem működőképes, és
- $x_i = 0$, ha az elem meghibásodott.

A rendszer állapotát leíró függvény:

$$S(x) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha a rendszer működőképes} \\ 0, & \text{ha a rendszer meghibásodott} \end{cases}$$

Soros rendszer

$$S(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i; \qquad \overline{S}(x) = 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} \left(1 - \overline{x}_i\right)$$

Párhuzamos rendszer

$$S(x) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} \left(1 - x_i\right); \qquad \overline{S}(x) = 1 - \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x}_i$$

MARKOV-FÉLE MEGBÍZHATÓSÁGI MODELL

MARKOV-FOLYAMAT

Utóhatás nélküli **sztochasztikus folyamat**: a jelenlegi állapot ismerete egyértelműen meghatározza a rendszer jövőbeni viselkedését. Ez a viselkedés csak a közvetlenül megelőző eseménytől függ, de független a folyamat múltjától.

A vizsgált rendszer lehetséges állapotait és az ezen állapotok közötti átmeneteket véletlen eseményeknek tekintjük. **Állandó átmeneti gyakoriságok** esetén **homogén Markov-láncról**, időfüggő átmeneti gyakoriságok esetén fél(szemi)-Markov-láncról vagy -folyamatról beszélünk.

A homogén Markov-folyamattal leírható rendszerek viselkedése két mennyiséggel jellemezhető:

- a kezdeti állapot valószínűsége: $\mathbf{P_i (0)}$ és
- az állapotátmenetek valószínűségei: $\mathbf{p_{ji} (\Delta t)}$.

Ha j=i+1, akkor $\mathbf{p_{ji} (\Delta t) = \lambda_{ji} . \Delta t}$ (meghibásodás).
Ha j=i-1, akkor $\mathbf{p_{ji} (\Delta t) = \mu_{ji} . \Delta t}$ (javítás).

MARKOV-LÁNCOK MÓDSZERE

Egy rendszer állapotvalószínűségeinek meghatározására szolgáló eljárás.

A vizsgálandó rendszer elemzésének eredményeként nyert **állapotdiagram** alapján láncszerű kifejezéseket képeznek.
Ezek a kifejezések a legegyszerűbb esetben lineáris, elsőrendű, homogén **differenciálegyenletek**.
Az átmeneti valószínűségeket, illetve gyakoriságokat az ún. **átmeneti mátrix** tartalmazza.

A módszer alkalmazásával „n” állapotú **javítható rendszerek** rendelkezésre állása (készenléte) számítható.

MARKOV-FÉLE MEGBÍZHATÓSÁGI MODELL

A modell a Markov-láncok módszerének alkalmazásával építhető fel.

A modellezendő rendszerek állapotszáma véges kell legyen, de az **állapotok száma kettőnél több** lehet.

Ez lehetővé teszi **különböző meghibásodási módok** figyelembevételét is, aminek a bonyolult rendszerek, így a közlekedési irányító rendszerek esetében nagy jelentősége van. Ezáltal megkülönböztethetők

- a működőképességet és
- a biztonságot veszélyeztető

meghibásodási módok, vagy

- a teljes funkciókiesést okozó és
- a részleges funkciókiesést okozó

meghibásodási módok.

A modell alkalmas **javítható rendszerek** készenlétének meghatározására is.

Példák a funkcionalitás részleges csökkenésére

1. példa

A városi közlekedési úthálózat csomópontjainak forgalmát irányító jelzőlámpa rendszerek **összehangolt működését** biztosító központi egység meghibásodásakor az egyes csomópontok jelzőlámpa rendszerei autonóm módon működnek tovább. Egy hiba tehát **funkciócsökkenést** okozott ugyan (az összehangolás elvesztése), de ez nem hatott ki sem az egyes lámparendszerek, sem a teljes úthálózat irányítórendszerének működőképességére.

2. példa

Egy közlekedési csomópontnál a rugalmas, **forgalomtól függő** jelzőlámpás irányítási mód lehetetlenné válik, ha valamelyik járműérzékelő meghibásodik. Ekkor azonban a rendszer automatikusan átkapcsolódik **fix idejű** (forgalomtól független) üzemmódra.

A modell felállítása

A modellnek

- a rendszertulajdonságokat a vizsgálat céljának (megbízhatósági analízis, rendszerkialakítás) megfelelően kell tükröznie,
- ugyanakkor a lehető legegyszerűbbnek kell lennie.

Elemzés alapján meg kell állapítani és definiálni a vizsgálandó rendszer **belső állapotait** (állapottér). A modellben az állapotoknak **irányított gráf** (állapotgráf, Markov-gráf) csomópontjai felelnek meg. Az egyes állapotok közötti viszonyokat, azaz az átmeneti rátákkal jellemzett állapotátmeneteket a gráf irányított élei szemléltetik.

A vizsgált rendszer állapotai képezhetnek

- **zárt** állapothalmazokat, amelyekben minden egyes állapotból bármelyik más állapot elérhető (rekurrens állapotok), és
- **tranziens** állapothalmazokat, amelyeket a rendszer elhagyva, oda nem képes többé visszatérni;
- egyetlen állapotból álló zárt halmazt - **abszorbens** (elnyelő) állapot. Ez az állapot meghibásodott állapot, javítás nélkül.

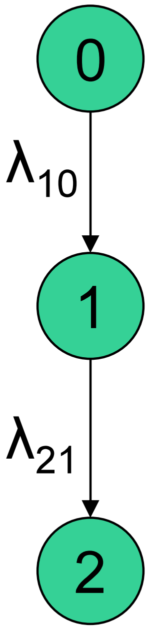
Megjegyzések a rendszerállapotokhoz

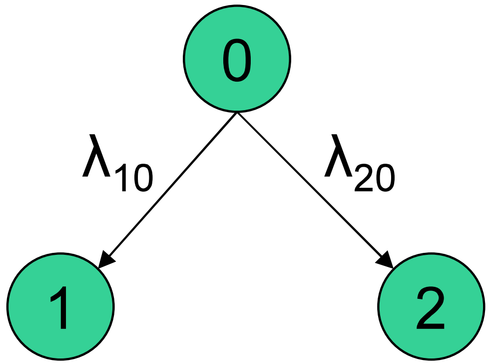
Egy nem javítható rendszer állapotai:

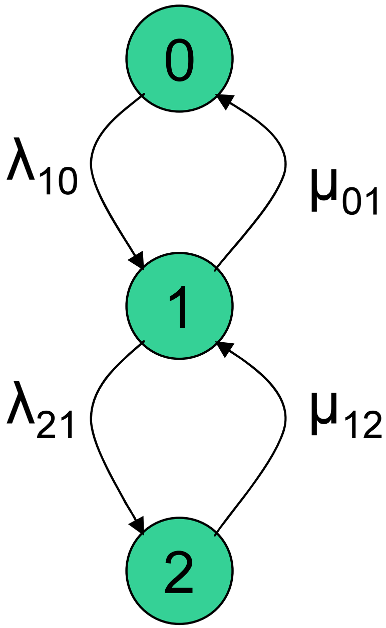
- tranziens (működőképes) állapotok,
- abszorbens (működésképtelen) állapot.

Egy többféle meghibásodási móddal rendelkező rendszernek lehet több abszorbens állapota is (pl. akadályozó és veszélyeztető).

Egy javítható rendszer állapotai periodikusan elérhetők, zárt állapothalmazt képeznek.







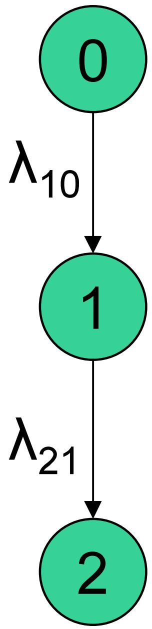
Az állapotegyenletek felírása

Az állapotmodellek matematikailag állapotegyenletekkel írhatók le.

Az állapotegyenletek felírásának lépései:

- differenciaegyenletek felírása,
- átmenet differenciálegyenletekbe,
- mátrixos írásmód alkalmazása.

Három állapotú, nem javítható rendszer



$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda_{10}\Delta t$$
$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t) + P_0(t)\lambda_{10}\Delta t \quad - P_1(t)\lambda_{21}\Delta t$$
$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t) \quad + P_1(t)\lambda_{21}\Delta t$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{(\Delta t)} = -\lambda_{10} P_0(t)$$

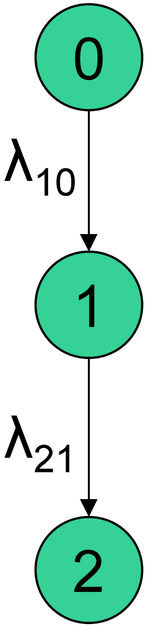
$$\lim_{\Delta t \to 0} = \frac{dP_0(t)}{dt} = P_0'(t)$$

$$P_0'(t) = -\lambda_{10} P_0(t)$$
$$P_1'(t) = +\lambda_{10} P_0(t) - \lambda_{21} P_1(t)$$
$$P_2'(t) = \quad + \lambda_{21} P_1(t)$$

$$\boxed{\underline{P}'(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{P}(t)}$$

$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{10} & 0 & 0 \\ +\lambda_{10} & -\lambda_{21} & 0 \\ 0 & +\lambda_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

Gyakorlati megjegyzések az állapotegyenletek felírásához



$$\boxed{\underline{P}'(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{P}(t)}$$

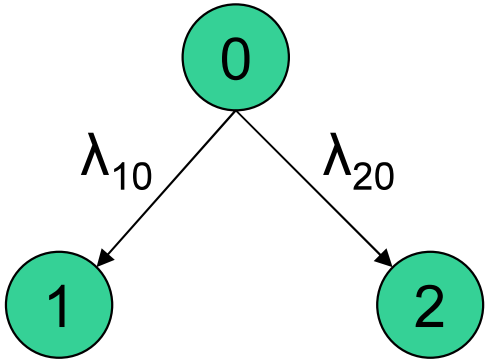
$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{10} & 0 & 0 \\ +\lambda_{10} & -\lambda_{21} & 0 \\ 0 & +\lambda_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$

A mátrixos forma közvetlenül az állapotdiagramból levezethető.

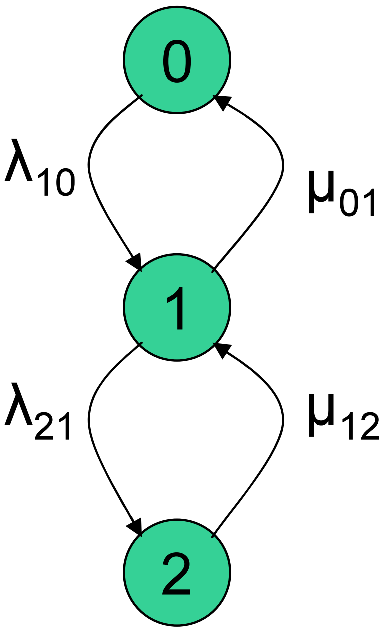
Az átmeneti mátrix minden oszlopösszege 0.

A főátlóban szereplő negatív értékek az adott oszlop többi elemének összegével egyenlők.

Mátrixos alak közvetlen felírása



$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{10}-\lambda_{20} & 0 & 0 \\ +\lambda_{10} & 0 & 0 \\ +\lambda_{20} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{10} & +\mu_{01} & 0 \\ +\lambda_{10} & -\lambda_{21}-\mu_{01} & +\mu_{12} \\ 0 & +\lambda_{21} & -\mu_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}$$