M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Közlekedési automatika példatár
1. rész

2019

Közlekedés- és Járműirányítás Tanszék

Készítette: Farkas Balázs

A példák összeállításában segített és lektorálta: Dr. Sághi Balázs, Dr. Bede Zsuzsanna, Lövétei István Ferenc, Dr. Baranyi Edit

1. Bevezető

Az alábbi példatár elsősorban a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudomány Egyetem Közlekedés- és Járműmérnöki Karán a Közlekedésmérnöki BSc. képzésben a Közlekedési automatika A (KOKAA179), illetve a Járműmérnöki BSc. képzésben a Megbízhatóság és biztonság (KOKAA582) tárgyat felvett hallgatók számára készült. Az említett tárgyak sikeres teljesítésének és a példatár eredményes használatának érdekében szeretnénk ellátni a hallgatókat néhány hasznos tippel, javaslattal. Először is fontos leszögezni, hogy a példatár önmagában nem elegendő a tárgy teljesítéséhez, nem helyettesíti a gyakorlati órák látogatását, csupán kiegészíti az ott elhangzottakat.

Egy feladat megoldását a vizsgálandó rendszer meghatározásával, lehatárolásával kezdjük. De mit is kell ez alatt érteni? Mindig egy olyan egységet, ami éppen a vizsgálatunk tárgyát képezi, pl. egy funkció végrehajtásához szükséges elemek összessége, de szintén lehet általánosan alkatrész, berendezés, al- vagy részrendszer, illetve akár a teljes fizikai rendszer is.

A gyakorlati órák során megismerkedhetnek a hallgatók azzal, hogy hogyan befolyásolja egy rendszer megbízhatóságát annak felépítése. A továbbiakban az egyes struktúrák (soros, páhuzamos, vegyes, stb.) említésekor azt mindig a megbízhatóság szempontjából vett struktúrának kell tekinteni.

Fontos megjegyezni, hogy a megbízhatósági struktúra nem (feltétlenül) egyezik meg az elemek fizikai kapcsolatával (pl. villamos áramkörök esetén). Továbbá említést érdemel, hogy a vizsgált rendszerre nézve, az egyes rendszertulajdonságokra (pl. funkciókra) ugyanazon elemekből álló rendszerre több, eltérő megbízhatósági modell is felállítható. Ugyanígy megemlítendő, hogy passzív redundancia esetén az alkalmazott kapcsoló sem jelent (minden esetben) fizikai értelemben (pl. áramköri) kapcsolót.

Ha a feladatokban nincs külön megadva, a működőképesség valószínűségére exponenciális eloszlást feltételezünk (azaz vizsgálatainkat a fürdőkádgörbe középső szakaszán végezzük, ahol a meghibásodási ráta, λ = áll.).

A példatárban a megoldásokban az eredményeket jellemzően négy értékes jegyre kerekítve adjuk meg. (Az értéket normálalakban megadva ez három tizedesjegyet jelent.) Számításaink során ez a pontosság többnyire megfelelő.

A példák megoldásánál lehetőség van a keresett mennyiség kifejezésére és a megadott értékek azután történő behelyettesítésére, de ugyanakkor megengedett egyből is behelyettesíteni és csak az ismert részek kiszámítása után kifejezni a keresett mennyiséget. Mivel a bevett gyakorlat hallgatónként is eltérő, a példatár mindkét megközelítésre bemutat feladatmegoldásokat.

Végül néhány jó tanácsot, tippet szeretnénk adni. Érdemes megjegyezni, hány órából áll egy év (365*24 = 8760 óra), hiszen példák megoldásakor szüksége lehet erre az értékre. Egyes esetkben elegendő a kerekített értékével (10^{-4} óra) számolni.

Aktív redundancia esetén minden elem üzemel, tehát igénybe van véve, passzív esetén azonban mindig csak a rendszer működéséhez kellő számú. A rendszer addig működőképes marad, amíg van a működéséhez szükséges számú működőképes elem. Ezeket elsősorban a Markov-gráfok felrajzolása esetén érdemes észben tartani.

A feladatok végén érdemes értelmezni a kapott eredményt. Például egy valószínűség csak nulla és egy közötti értéket vehet fel. Azonos számú elem mellett a passzív redundancia mindig megbízhatóbb rendszert eredményez (ideális kapcsolót feltételezve).

A készítők

2. Megbízhatósági paraméterek

2.0.1. Száz egyforma elemet vizsgáltak, és adott (egységnyi) időközönként (*t*) megnézték, hány hibásodott meg közölük az adott intervallumban (*ΔN*). Számítsuk ki a táblázat újabb soraiba és az idő függvényében ábrázoljuk diagramon az alábbi táblázatban szereplő értékeket:

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
ΔN	**0**	**2**	**0**	**0**	**2**	**16**	**32**	**43**	**5**
N(t)	100	98	98	98	96	80	48	5	0
R(t)	1	0,98	0,98	0,98	0,96	0,8	0,48	0,05	0
F(t)	0	0,02	0,02	0,02	0,04	0,2	0,52	0,95	1
ΔF	0	0,02	0	0	0,02	0,16	0,32	0,43	0,05
f(t)	0	0,02	0	0	0,02	0,16	0,32	0,43	0,05
λ(t)	0	0,02	0	0	0,02041	0,1667	0,4	0,8958	1

A megoldás során az alábbi képleteket használjuk:

Megbízhatósági paraméter	**Képlet**	**Alternatív képlet**
állomány	$N(t) - \mathit{\Delta} N$	-
működőképesség valószínűsége	$\frac{N(t+\Delta t)}{N_0}$	-
meghibásodás valószínűsége	$F(t+\Delta t) = \frac{N_0 - N(t+\Delta t)}{N_0}$	$1 - R(t)$
meghibásodás valószínűségének változása	$\mathit{\Delta} F = F(t+\Delta t) - F(t)$	-
meghibásodási sűrűség	$f(t+\Delta t) = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N_0 * \Delta t}$	$\frac{\Delta F}{\Delta t}$
meghibásodási ráta	$\lambda(t+\Delta t) = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t) * \Delta t}$	$\frac{f(t)}{R(t)}$

Példaként bemutatjuk a *t* = 1 időintervallumhoz tartozó számításokat.

$$N(1) = N(0) - \mathit{\Delta} N = 100 - 2 = 98$$

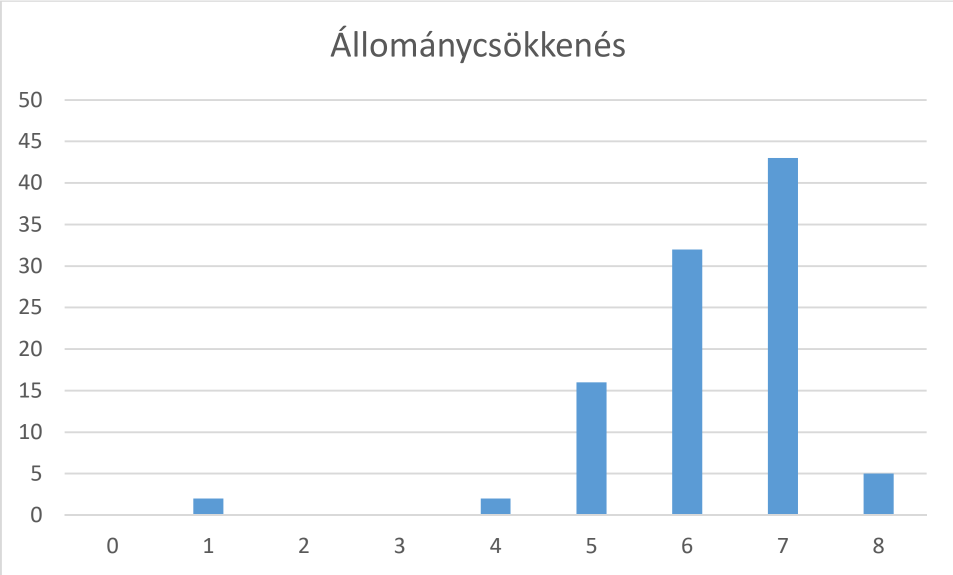
$$R(1) = \frac{N(1)}{N_0} = \frac{98}{100} = 0{,}98$$

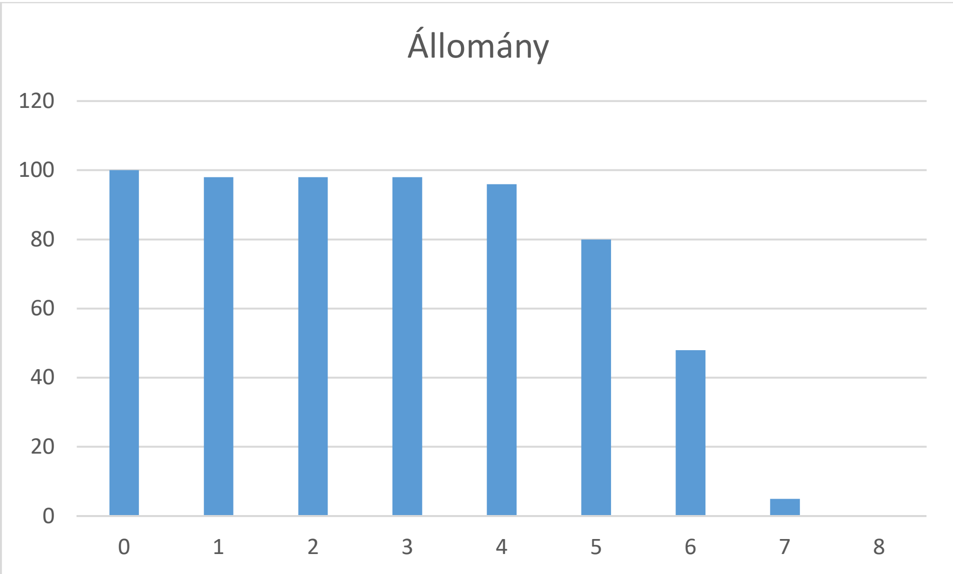
$$F(1) = \frac{N_0 - N(1)}{N_0} = \frac{100 - 98}{100} = 0{,}02$$

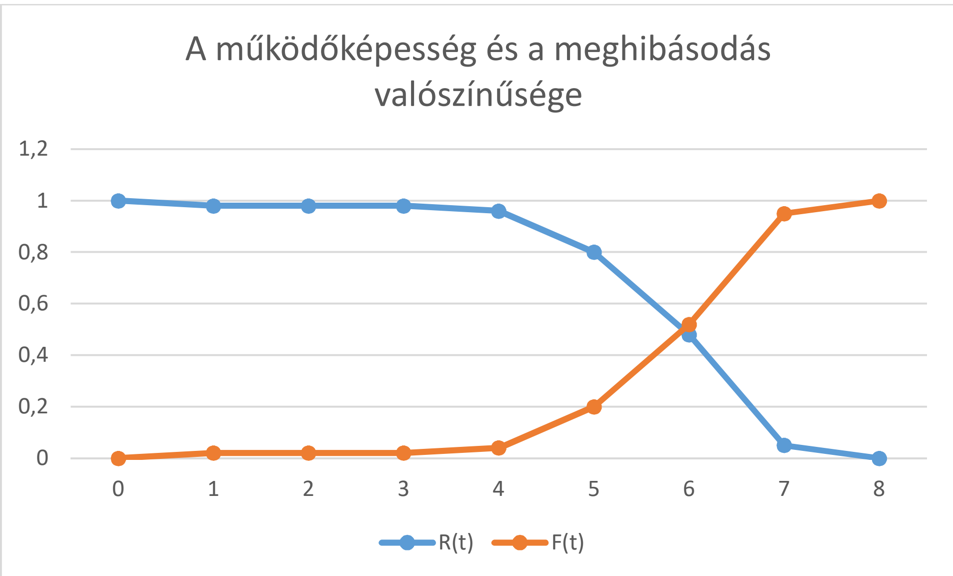
$$\mathit{\Delta} F = F(t+\Delta t) - F(t) = 0{,}02 - 0 = 0{,}02$$

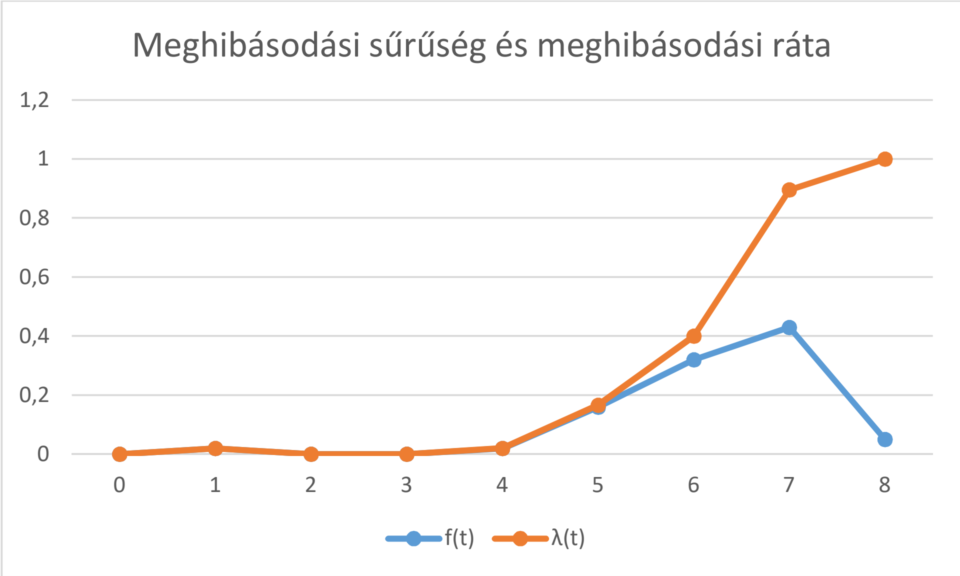
$$f(1) = \frac{N(0) - N(1)}{N_0 * \Delta t} = \frac{100 - 98}{100 * 1} = 0{,}02$$

$$\lambda(1) = \frac{N(0) - N(1)}{N(0) * \Delta t} = \frac{100 - 98}{100 * 1} = 0{,}02$$


Állománycsökkenés
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

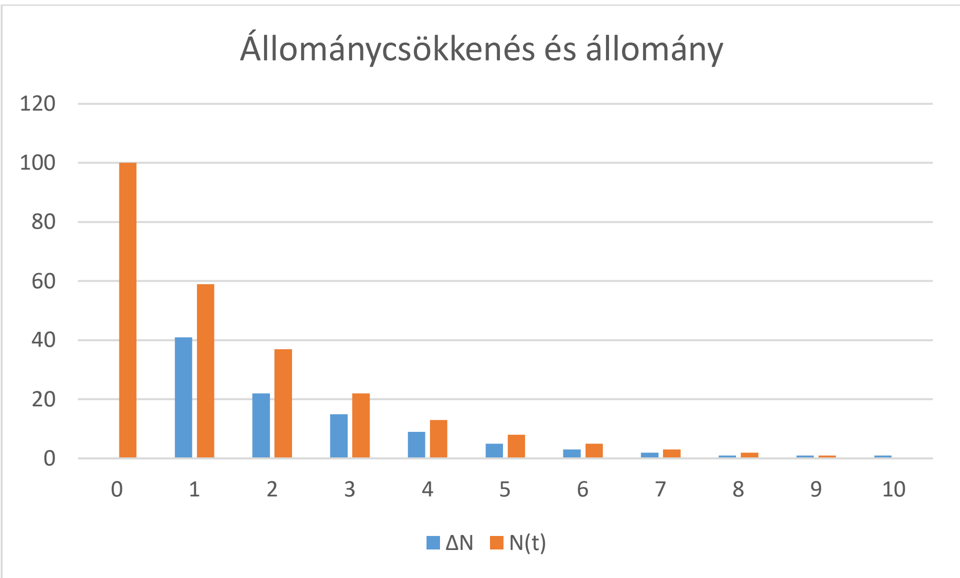

Állomány
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

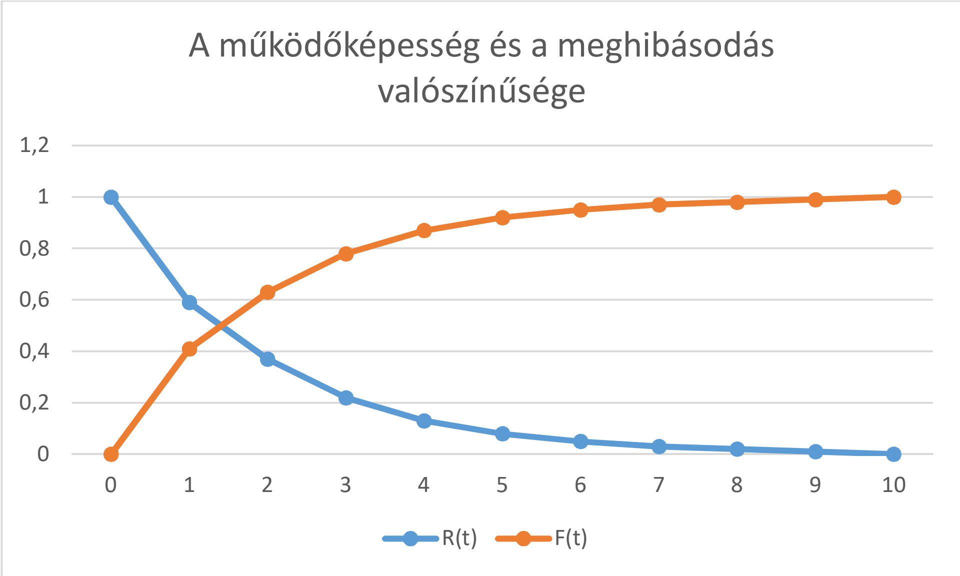

A működőképesség és a meghibásodás valószínűsége
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
R(t)
F(t)

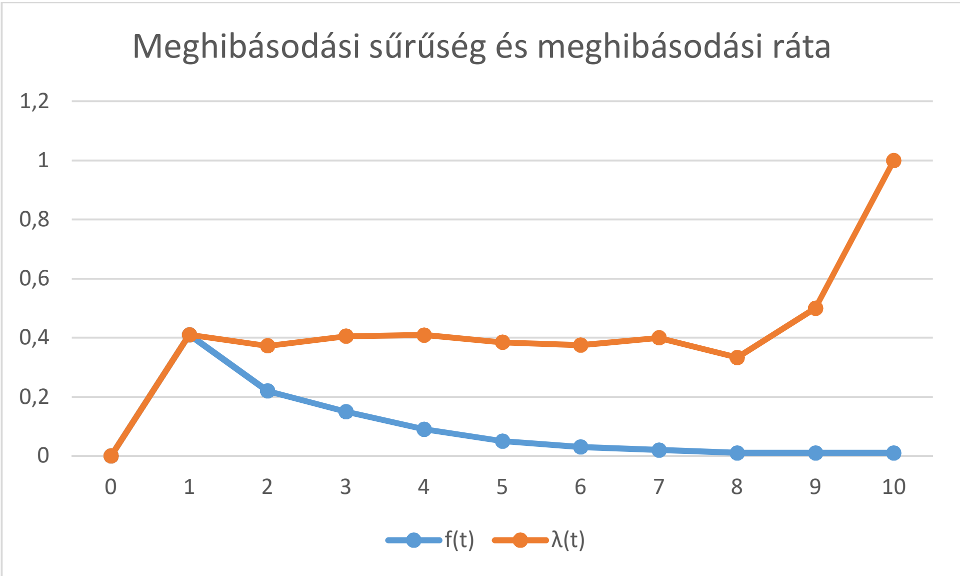


2.0.2. Száz megbízhatóság szempontjából azonos tulajdonságú elem működését vizsgáltuk. Egyenlő időközönként (*t*) megszámoltuk, hány darab működik, a darabszámokat az alábbi táblázat *N(t)* sorába vettünk fel. Számítsuk ki a táblázat többi sorába a működőképesség és a meghibásodás valószínűségét, a meghibásodási sűrűséget és meghibásodási rátát! Ábrázoljuk az állománycsökkenést és a működőképes elemek aktuális darabdszámát, valamint a kiszámolt mennyiségeket az idő függvényében! Mit veszünk észre? Határozzuk meg az elemek várható élettartamát!

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N(t)	**100**	**59**	**37**	**22**	**13**	**8**	**5**	**3**	**2**	**1**	**0**
ΔN	0	41	22	15	9	5	3	2	1	1	1
R(t)	1	0,59	0,37	0,22	0,13	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0
F(t)	0	0,41	0,63	0,78	0,87	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1
ΔF	0	0,41	0,22	0,15	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01
f(t)	0	0,41	0,22	0,15	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01
λ(t)	0	0,41	0,3729	0,4054	0,4091	0,3846	0,375	0,4	0,3333	0,5	1







Már a táblázat alapján is felfedezhettük, de az ábrán még jobban látszik, hogy a meghibásodási ráta értéke közel állandó ($\lambda \approx 0{,}4$ 1/időegység). (Kezdetben 0, mivel a 0 időpontban még nem volt meghibásodás, a vizsgálat végén pedig 1, mivel ekkor már az összes működő elem meghibásodott.)

Ebben az esetben tehát a működőképesség valószínűsége exponenciális eloszlású, ami az ábrázolás során is jól látható. Ebben az esetben a várható élettartam megegyezik a meghibásodási ráta reciprokával.

$$T = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\ időegység$$

Exponenciális eloszlás esetén a várható élettartam leolvasható az *R(t)* függvény *t* = 0 pontjába húzott érintő meredekségeként is. Ellenőrizzük számításainkat közelítéssel, a görbe első két pontjára illesztett egyenes meredekségének kiszámításával!

$$\frac{T}{1} = \frac{t(1) - t(0)}{R(0) - R(1)} = \frac{1 - 0}{1 - 0{,}59} = 2{,}439\ időegység$$

Számításaink helyesnek bizonyultak.

3. Elemek megbízhatósága

3.0.1. Egy egyetlen elemből álló rendszer λ = 5*10^{-5} 1/h meghibásodási rátával rendelkezik. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a működőképességének valószínűsége az idő múlásával (a vizsgált intervallum hosszának növekedésével)!

a) $t_a = 1\, perc = \frac{1}{60} óra,\ R_s(t_a) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*\frac{1}{60}} = 0{,}9999992$

b) $t_b = 1\, óra,\ R_s(t_b) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*1} = 0{,}99995$

c) $t_c = 1\, nap = 24\, óra,\ R_s(t_c) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*24} = 0{,}9988$

d) $t_d = 1\, hét = 7 * 24 = 168\, óra,\ R_s(t_d) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*168} = 0{,}9916$

e) $t_e = 1\, hónap = 30 * 24 = 720\, óra,\ R_s(t_e) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*720} = 0{,}9646$

f) $t_f = 1\, év = 365 * 24 = 8760\, óra,\ R_s(t_f) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*8760} = 0{,}6453$

g) $t_g = 1\, évtized = 87600\, óra,\ R_s(t_g) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*87600} = 0{,}01253$

h) $t_h = 1\, évszázad = 876000\, óra,\ R_s(t_h) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-5}*876000} = 9{,}504 * 10^{-20}$

3.0.2. Egy gépkocsi tényleges működését a gépkocsi által megtett út hosszával mérjük. A gépkocsi tényleges működése exponenciális eloszlású λ = 10^{-5} 1/km meghibásodási rátával rendelkezik. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a gépkocsi az üzembe helyezéstől számított 15000 km megtétele alatt meghibásodik?

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-10^{-5}*15000} = 1 - e^{-1{,}5} = 0{,}1393 = 13{,}93\ \%$

A Közlekedési automatika gyakorlatok során a várható élettartamot többnyire idő dimenzióban használjuk (ennek megfelelően a meghibásodási rátát pedig 1/idő dimenzióban). Fontos azonban megjegyezni, hogy a gyakorlatban más dimenziójú mennyiségekkel is meg lehet határozni egy rendszer élettartamát. Erre néhány példa:

- Közúti járműveknél az üzembe helyezést követően eltelt idő mellett a megtett kilométerek száma.
- Csapágyaknál (millió) körülfordulás.
- Akkumulátorok estén merülési/töltési ciklus.
- Különböző műszaki eszközöknél jellemző technológiai folyamat (pl.: fényképezőgépeknél expozíciók száma, nyomtatóknál nyomtatott oldalak száma, stb.).

A számításokhoz is érdemes idő dimenzióra áttérni (a gyakorlatban az óra [h] használatos), amit számos esetben könnyű megtenni (pl. csapágyaknál a fordulatszám ismeretében). Rendelkezésre állás számításánál (ld. 10. fejezet) elengedhetetlen, mivel a javítási időt csak idő dimenzióban lehet megadni.

3.0.3. Egy izzót egy lámpában munkanapokon 7 órán keresztül használnak. Mekkora érték adódik az izzó meghibásodási rátájára, ha megkövetelik, hogy kétévente (évi 250 munkanap) csak egyszer hibásodjon meg?

$$\lambda = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 * 250 * 7} = 2{,}857 * 10^{-4}\, {}^{1}/_{h}$$

Ebben a példában tulajdonképpen a MTBF (Mean Time Between Failures) érték lett megadva, hiszen az az elvárás, hogy csak (átlagosan) kétévente hibásodhat meg az izzó. Mivel az izzó nem javítható, ezért ez az érték meg fog egyezni a várható élettartamával, ami a meghibásodási ráta reciproka.

3.0.4. Egy 1960-as évekből származó anekdota alapján (forrás: index fórum). Számítsuk ki, hány forintot lehetett volna megtakarítani az intézkedés bevezetésével!

Felmerült, hogy akik az autóbuszon egy megállóból elindulva azonnal jeleznek, mert a következő megállóban le akarnak szállni, ők tulajdonképpen gondatlan népgazdasági károkozók. Mert ha nem akkor jelezne, hanem csak a megálló előtt 10 másodperccel, akkor ugyanúgy értesülne a vezető a leszállási szándékról, és az kinyitná az ajtót.

Az ötletgazda felszorozta ezt az időkülönbözetet az autóbusz két ajtajával (a harmadik, hátsó ajtó akkor még csak felszállásra volt engedélyezett), a megállók, az egy napi menetek, és a napi buszok számával, majd az év naptári napjaival, a következőképp:

60 s x 2 ajtó x 15 megálló x 30 menet x 1500 autóbusz x 354 nap/év

Kiszámolta, hogy egy ilyen visszajelző égő hány órát bír. Végül eredményül megkapta, ha kötelezővé tennék, hogy leszállás előtt csak 10 másodperccel szabad jelezni, akkor hány ilyen égőt lehetne megtakarítani.

Egy égő, akkoriban kb. 40 fillér volt tehát beszorozták a megtakarított égők számával, és kijött egy szép összeg. Ez a szép összeg fordítható munkásjóléti intézkedésre is, így írta a szerző.

Az egyszerűség kedvéért számoljunk 1500 autóbusszal, melyek mind háromajtósak. Tegyük fel, hogy egy busz egy nap 30 menetet végez, menetenként átlagosan 15 megállóval. Számoljunk azzal az értékkel, hogy egy utas a megálló előtt körülbelül 70 másodperccel jelez! Feltételezzük, hogy mindegyik autóbusz átlagosan havonta egy napot nincs forgalomban.

Vegyük egy izzó várható élettartamát 1000 órának. A történetből kiderül, hogy egy izzó ára 40 fillér.

Egy izzó tehát összesen egy évben ennyit világít:

$$t_1 = n_{menet} * n_{megálló} * n_{üzemnap} * t_{jelzés1} = 30 * 15 * 354 * 70 = 11151000\ s = 3097{,}5\ h$$

Rövidebb jelzési idővel pedig egy évben ennyit világítana:

$$t_2 = n_{menet} * n_{megálló} * n_{üzemnap} * t_{jelzés2} = 30 * 15 * 354 * 10 = 159300\ s = 442{,}5\ h$$

A két esetben az egy évben elhasználandó izzók száma egy ajtóra:

$$n_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{3097{,}5}{1000} = 3{,}098$$

$$n_2 = \frac{t_2}{T} = \frac{442{,}5}{1000} = 0{,}4425$$

Egy ajtóra a két érték különbségét lehet tehát megtakarítani. A teljes járműállomány esetén ezt az értéket kell felszorozni az ajtók darabszámával és az autóbuszok számával. A gazdasági nyereség pedig a teljes állományra megspórolt izzók darabszámának és egy izzó árának szorzataként áll elő.

$$N = (n_1 - n_2) * n_{ajtó} * n_{autóbusz} * N_{izzó} = (3{,}098 - 0{,}4425) * 2 * 1500 * 40 = 318600\ fillér = \\ = 3186\ forint$$

Az eredményül kapott, „munkásjóléti intézkedésekre” fordítható összeg az 1960-as években a bruttó havi átlagkereset 1,5-2-szerese volt. (És akkor még a világító izzó által okozott többletüzemanyag-fogyasztással nem is számoltunk…)

4. Soros rendszerek

A való életben a legtöbb műszaki rendszer nem egy elemből épül fel. Egy egyszerű példát tekintve egy szobai világítás is egy háromelemű rendszerként (kapcsoló, vezetékek, izzó) tekinthető. Mivel ezek közül bármely elem meghibásodása esetén (pl.: a kapcsoló nem kapcsol, elszakad a vezeték vagy kiég az izzó) a teljes rendszer működésképtelenné válik (a világítás nem működik), megbízhatóság szempontjából soros rendszerről beszélünk.

A közlekedési példák közül talán a legszemléletesebb egy autó, mely a haladóképességét tekintve a következő elemek soros kombinációjaként tekinthető: kerekek, felfüggesztés, erőátvitel, motor.

Nézzünk néhány egyszerűbb példát soros rendszerek megbízhatósági jellemzőinek számítására!

4.0.1. Tekintsünk egy azonos megbízhatósági tulajdonságokkal rendelkező, n darab elemből álló, (megbízhatóság szempontjából) soros rendszert! Tudjuk, hogy egy adott [0; t_1] időintervallumban az elemek 90%-os valószínűséggel működnek. Összehasonlításként határozzuk meg a működőképesség valószínűségét n = 1, 10 és 100 darab elemre!

$R(t_1) = 0{,}9$

a) $n = 1,\ R_{s1}(t_1) = ?$
b) $n = 10,\ R_{s1}\ (t_1) = ?$
c) $n = 100,\ R_{s100}(t_1) = ?$

Azonos tulajdonságú elemekből összeállított soros rendszerek esetén ismert összefüggés a működőképesség valószínűségére:

$R_s(t) = R_i^n(t)$

a) $R_{s1}(t_1) = R(t_1) = 0{,}9$
b) $R_{s1}\ (t_1) = R^{10}(t_1) = 0{,}9^{10} = 0{,}3487$
c) $R_{s100}(t_1) = R^{100}(t_1) = 0{,}9^{100} = 2{,}656 * 10^{-5}$

Látható, hogy az elemek számának növelésével a működőképesség valószínűsége egyre jobban csökken. Már tíz elem alkalmazásával is nagyobb valószínűséggel lesz az adott időintervallumban működésképtelen a rendszer, mint működőképes. Száz elem alkalmazásával pedig a meghibásodás valószínűsége 99,99%-nál is nagyobb (a vizsgált időintervallumban).

4.0.2. Az előzőhöz hasonló példával szemléltetjük, hogyan hat a rendszer működőképességének valószínűségére újabb elemek sorba kapcsolása. Legyen jelen esetben a működőképesség valószínűsége egy adott [0; t_1] időintervallumban 0,5! (Megjegyezzük, hogy ez az érték nagyon kicsi, a gyakorlatban nem jellemző. Jelen feladatban azért választottuk, hogy jól szemléltethető legyen R alakulása az elemek számának függvényében.) Határozzuk meg és ábrázoljuk a működőképesség valószínűségét 1, 2…5 elemre!

$R(t_1) = 0{,}5$

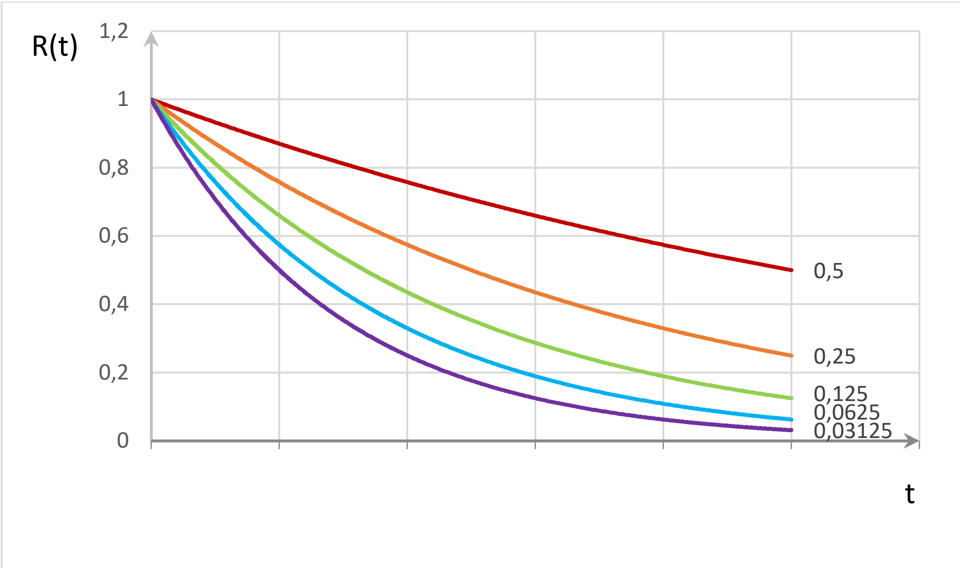
a) $n = 1,\ R_{s1}(t_1) = ?$
b) $n = 2,\ R_{s2}(t_1) = ?$
c) $n = 3,\ R_{s3}(t_1) = ?$
d) $n = 4,\ R_{s4}(t_1) = ?$
e) $n = 5,\ R_{s5}(t_1) = ?$

Azonos tulajdonságú elemekből összeállított soros rendszerek esetén ismert összefüggés a működőképesség valószínűségére:

$R_s(t) = R_i^n(t)$

a) $R_{s1}(t_1) = R(t_1) = 0{,}5$
b) $R_{s2}(t_1) = R^2(t_1) = 0{,}5^2 = 0{,}25$
c) $R_{s3}(t_1) = R^3(t_1) = 0{,}5^3 = 0{,}125$
d) $R_{s4}(t_1) = R^4(t_1) = 0{,}5^4 = 0{,}0625$
e) $R_{s5}(t_1) = R^5(t_1) = 0{,}5^5 = 0{,}03125$

Grafikonon ábrázolva a következő görbesereget kapjuk:



Mivel jelen esetben egy elem működőképességének valószínűsége 50%, az ezekből épített soros rendszer működőképességének valószínűsége minden újabb elem hozzáadásával a felére csökken a vizsgált időintervallumban.

4.0.3. Vizsgáljunk két elemből álló soros rendszereket egy adott [0; t_1] időintervallumban!

a) $R_{a1}(t_1) = 0{,}1,\ R_{a2}(t_1) = 0{,}9,\ R_{sa}(t_1) = ?$
b) $R_{b1}(t_1) = R_{b2}(t_1) = 0{,}5,\ R_{sb}(t_1) = ?$

Soros rendszerek esetén az egyes elemek működőképességének valószínűsége összeszorzódik:

$$R_s(t_1) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t_1)$$

a) $R_{sa}(t_1) = R_{a1}(t_1) * R_{a2}(t_1) = 0{,}1 * 0{,}9 = 0{,}09$
b) $R_{sb}(t_1) = R_{b1}(t_1) * R_{b2}(t_1) = 0{,}5 * 0{,}5 = 0{,}25$

Soros rendszerek működőképességének valószínűsége mindig kisebb lesz, mint az azt felépítő bármelyik elem működőképességének valószínűsége (azaz a rendszer legrosszabb eleménél is). A fenti példa alapján látható, hogy bár a működőképességek valószínűségeinek összege a két esetben megegyezett, a belőlük épített soros rendszerek működőképességének valószínűsége nagymértékben eltér. Jelen példában az azonos elemekből álló soros rendszer közel háromszor nagyobb valószínűséggel marad működőképes ugyanabban az időintervallumban, mint a különböző tulajdonságú elemekből álló.

4.0.4. Vizsgáljunk két elemből álló soros rendszereket egy adott [0; t_1] időintervallumban!

a) $R_{a1}(t_1) = 0{,}6,\ R_{a2}(t_1) = 0{,}8,\ R_{sa}(t_1) = ?$
b) $R_{b1}(t_1) = R_{b2}(t_1) = 0{,}7,\ R_{sb}(t_1) = ?$

Soros rendszerek esetén az egyes elemek működőképességének valószínűsége összeszorzódik:

$$R_s(t_1) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t_1)$$

a) $R_{sa}(t_1) = R_{a1}(t_1) * R_{a2}(t_1) = 0{,}6 * 0{,}8 = 0{,}48$
b) $R_{sb}(t_1) = R_{b1}(t_1) * R_{b2}(t_1) = 0{,}7 * 0{,}7 = 0{,}49$

Látható tehát, hogy nem mindenáron szükséges azonos tulajdonságú elemek alkalmazása. Egymáshoz közeli értékekkel bíró elemek alkalmazásával a működőképesség valószínűsége se romlik számottevően. Mi befolyásolja tehát azt, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkező elemeket vásároljunk és építsünk be rendszerünkbe?

Elképzelhető, hogy egy jobb (kisebb) meghibásodási rátával rendelkező elem előállítása (pl. a pontosabb gyártási technológia miatt) nagyobb költséget igényel. Ennek megfelelően az ára is magasabb lesz.

Fordítva sincs értelme (feleslegesen) nagyobb összeget kiadni arra, hogy pl. egy soros rendszer két eleme közül csak az egyik működőképességét növeljük, mivel a teljes rendszer működőképességének valószínűsége akkor is legfeljebb a rosszabb elemét fogja megközelíteni.

4.0.5. Egy megbízhatósági szempontból soros rendszer 3 különböző elemből áll, a meghibásodási ráták $\lambda_1 = 9*10^{-4}$ 1/h, $\lambda_2 = 6*10^{-5}$ 1/h, $\lambda_3 = 3*10^{-6}$ 1/h. Mennyi ideig (hány óráig) működhet a rendszer, ha a meghibásodás valószínűsége nem lehet nagyobb, mint 10%?
Soros rendszerek esetén a meghibásodási ráták összeadódnak.

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 * 10^{-4} + 6 * 10^{-5} + 3 * 10^{-6} = 9{,}63 * 10^{-4}\ 1/h$$

A meghibásodás valószínűségéből számítható a működőképesség valószínűsége.

$$1 - F = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 = R = e^{-\lambda_s t} = e^{-9{,}63*10^{-4}*t}$$

A fenti egyenletből fejezzük ki a keresett t értéket! Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát!

$$ln0{,}9 = -9{,}63 * 10^{-4} * t$$

$$t = \frac{ln0{,}9}{-9{,}63 * 10^{-4}} = 109{,}4\ h \approx 109\ h$$

Ha válaszunkat órákra kerekítve szeretnénk megadni, akkor mindig (a rendszer struktúrájától függetlenül) lefele kell kerekíteni, mivel a meghibásodás valószínűsége az eltelt idővel nő. Tehát a rendszert legfeljebb 109 órán át működtethetjük.

4.0.6. Hány elemből állhat az a soros rendszer, amelyet azonos elemekből (λ = 8*10^-8 1/h) szeretnénk felépíteni, és elvárás, hogy az üzembe helyezést követően két éven belül 90% valószínűséggel működjön?

$t = 8760 * 2 = 17250\ h$

$R_s(t) = 0{,}9$

Számítsuk ki a teljes rendszer működőképességének valószínűségét!

$R(t) = e^{-\lambda} \ = e^{-8*10^{-8}*17250} = 0{,}9986$

Fejezzük ki az egyenletből *n*-t!

$R^n(t) = R_s(t)$

$$n = \frac{lnR_s(t)}{lnR(t)} = \frac{ln0{,}9}{ln0{,}9986} = 75{,}2 \approx 75$$

Mivel soros rendszerről beszélünk, 76 elem alkalmazásával már nem tudnánk teljesíteni az elvárt működőképességet. Tehát legfeljebb 75 darab ilyen elemet alkalmazhatok.

4.0.7. Mekkora a táblázatban felsorolt elemekből álló kisrádió (mint soros rendszer) első meghibásodásáig eltelt átlagos időtartama?

Megnevezés	Mennyiség [db]	λ [10^{-8} 1/h]
Ellenállás	28	0,03
Elektrolit kondenzátor	4	0,3
Ferritmagos tekercs	5	0,3
Tranzisztor	8	2,0
Kondenzátor	10	0,1
Kézi forrasztási pont	130	0,03

A keresett érték a rendszer várható élettartama.

$$MTTFF = T = \frac{1}{\lambda_s}$$

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = (28 * 0{,}03 + 4 * 0{,}3 + 5 * 0{,}3 + 8 * 2 + 10 * 0{,}1 + 130 * 0{,}03) * 10^{-8} =$$

$$= 24{,}44 * 10^{-8} = 2{,}444 * 10^{-7}\ 1/h$$

$$MTBF = T = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{2{,}444 * 10^{-7}} = 4091653\ h \approx 467\ év$$

5. Redundancia

Mint az előző fejezetben láthattuk, a gyakorlatban a rendszerek működőképesség szempontjából jellemzően soros felépítésűek. Ez a struktúra azonban kedvezőtlenül hat a működőképességre. A megbízhatóság növelésére számos megoldás létezik. Ezek egyike a rendszer elemeinek tartalékolása, a strukturális redundancia alkalmazása.

Ez lényegében azt jelenti, hogy a rendszer működésében részt vevő elemekhez olyan pótelemeket (többletet) rendelünk, amik képesek az adott feladat ellátására, de a rendszer működéséhez alapvetően nem szükségesek. A tartalékolt elemek üzemelhetnek a „fő” elemekkel egyidejűleg (ekkor aktív redundanciáról, párhuzamos rendszerekről beszélünk), vagy addig üzemen kívül lehetnek, amíg a „fő” elem meg nem hibásodik (passzív redundancia). A következőkben e két rendszerstruktúrára veszünk példákat.

5.1. Párhuzamos rendszerek (aktív redundancia)

5.1.1. A feladat meghatározni egy két elemből álló párhuzamos (egy azonos tartalékelemmel rendelkező) rendszer működőképességének valószínűségét.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-6}\ {}^{1}\!/_{h}$

$t = 10^5\ h$

$R_s(t) = ?$

Először számoljuk ki egy elem működőképességének valószínűségét!

$R_1(t) = e^{-\lambda} \ = e^{-10^{-6} * 10^5} = e^{-0,1} = 0,9048$

Párhuzamos rendszerek számításánál a meghibásodások valószínűségéből indulunk ki, így számítsuk ki ezt a jellemzőt egy elemre!

$F_1(t) = 1 - R_1(t) = 1 - 0,9048 = 0,09516$

Melegtartalékolt rendszereknél a párhuzamosan kapcsolt elemek meghibásodási valószínűségei összeszorzódnak.

$F_s(t) = F_1^2(t) = 0,09516^2 = 0,009056$

A meghibásodás és a működőképesség valószínűsége között fennálló összefüggés továbbra is alkalmazható.

$R_s(t) = 1 - F_s(t) = 1 - 0,009056 = 0,9909$

Látható, hogy a működőképesség valószínűsége egy melegtartalék alkalmazásával kb. 90%-ról kb. 99%-ra emelkedett.

5.1.2. Meddig üzemeltethetek egy összesen három azonos elemből (λ = 10^{-5} 1/h) álló, melegtartalékkal rendelkező rendszert, ha azt szeretném, hogy ebben az időintervallumban működőképességének valószínűsége legalább 99,97% legyen?

$n = 3$

$\lambda = 1 * 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{h}$

$R_s(t) = 0,9997$

$t = ?$

Párhuzamos rendszerek számításánál a meghibásodások valószínűségéből indulunk ki, így számítsuk ki először ezt a rendszerünkre!

$$F_s(t) = 1 - R_s(t) = 1 - 0{,}9997 = 0{,}0003$$

Írjuk fel a meghibásodás valószínűségét rendszerünkre és fejezzük ki az összefüggésből t-t!

$$F_s(t) = (1 - e^{-\lambda t})^3$$

$$\sqrt[3]{F_s(t)} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \sqrt[3]{F_s(t)}$$

$$-\lambda t = ln\left(1 - \sqrt[3]{F_s(t)}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(1 - \sqrt[3]{F_s(t)}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(1 - \sqrt[3]{0{,}0003}\right)}{-10^5} = 6929\ h = 288{,}7\ nap = 0{,}791\ év$$

Tehát a rendszert legfeljebb 6929 órán keresztül üzemeltethetem.

5.1.3. Hány azonos tulajdonságú elemből kell állnia annak az aktív redundanciát tartalmazó rendszernek, amelynek a [0; 8000 h] időintervallumban legalább 99%-os valószínűséggel kell működnie? Mennyi lesz az így felépített rendszer várható élettartama?

$$\lambda = 3 * 10^{-5}\ {}^{1}\!/_{h}$$

$$t = 8000h$$

$$R_s(t) = 0{,}99 \rightarrow F_s(t) = 0{,}01$$

$$n = ?$$

Először számoljuk ki egy elem működőképességének, illetve meghibásodásának valószínűségét!

$$R(t) = e^{-\lambda}\ = e^{-3*10^{-5}*8*10^{3}} = e^{-2{,}4*10^{-1}} = 0{,}7866$$

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - 0{,}7866 = 0{,}2134$$

Írjuk fel a meghibásodás valószínűségét a rendszerünkre!

$$F^n(t) = F_s(t)$$

Helyettesítsük be az ismert értékeket!

$$0{,}2134^n = 0{,}01$$

Az ismeretlen darabszám meghatározására mindkét oldal tetszőleges alapú logaritmusát kell vennünk. (Természetes alapú logaritmussal csak akkor kell számolnunk, ha az egyik oldalon exponenciális kifejezés áll).

Tipp: Ha a meghibásodás valószínűsége egyetlen, tetszőleges helyiértéken álló egyes (azaz 10 egy negatív kitevőjű hatványa), célszerű mindkét oldal tízes alapú logaritmusát venni, így legalább az egyik oldal kiszámításához nem szükséges számológép használata.

$$n * lg0{,}2134 = lg0{,}01 = lg10^{-2} = -2$$

$$n = \frac{-2}{lg0{,}2134} = 2{,}981$$

Aktív redundanciánál felfele kell kerekíteni (kevesebb elemmel nem teljesíthető az elvárt megbízhatóság), tehát:

$n = 3$

Azaz legalább 3 elemet kell alkalmazni a kívánt megbízhatóság elérése érdekében.

Ellenőrizzük számításainkat!

$R(t) = 1 - (1 - R(t))^3 = 1 - (1 - 0{,}7866)^3 = 0{,}9903 > 0{,}99$

A várható élettartam:

$$T = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{\lambda} = 1{,}833 * \frac{1}{3 * 10^{-5}} = 6{,}111 * 10^4\ h$$

5.2. Passzív redundancia

5.2.1. Egy berendezésben passzív redundanciát (hideg tartalékot) kívánunk alkalmazni. Számítsuk ki a működőképesség valószínűségét tartalék nélküli esetre, valamint egy és két tartalék alkalmazásának esetére! Mekkora lesz az így felépített rendszerek várható élettartama?

$\lambda = 10^{-5}\ {}^1/_h$

$t = 10^5 h$

$R_s(t) = ?$

$T = ?$

a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 3$

Először számítsuk ki a működőképesség valószínűségét. Alkalmazzuk a korábban tanult képleteket!

a) $R_{s1}(t) = e^{-\lambda t} = e^{-10^{-5} * 10^5} = \frac{1}{e} = 0{,}3679$
b) $R_{s2}(t) = (1 + \lambda t) * e^{-\lambda t} = (1 + 10^{-5} * 10^5) * e^{-1\ ^{-5} * 10^5} = \frac{2}{e} = 0{,}7358$
c) $R_{s3}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda} = \left(\frac{(10^{-5} * 10^5)^0}{0!} + \frac{(10^{-5} * 10^5)^1}{1!} + \frac{(10^{-5} * 10^5)^2}{2!}\right) * e^{-10^{-5} * 10^5} = \Big(1 + 1 + \frac{1}{2}\Big) * \frac{1}{e} = 0{,}9197$

A várható élettartam az alkalmazott elemek számával egyenes arányban nő.

a) $T_1 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5 h$
b) $T_2 = 2 * \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{10^{-5}} = 2 * 10^5\ h$
c) $T_3 = 3 * \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{10^{-5}} = 3 * 10^5\ h$

5.2.2. Egy elem meghibásodási rátája λ = 10^{-4} 1/h. Az építendő rendszer meghibásodási valószínűsége az üzemebe helyezés után 8000 órával sem nőhet 0,01 fölé. Teljesíti-e a rendszer ezt a követelményt, ha két tartalék elemet is alkalmazunk, mint hideg tartalék?

$R_e(t) = 1 - F_e(t) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{i=0}^{2} \frac{(10^{-4} * 8000)^i}{i!} * e^{-1 \quad ^{-4} * 8000} =$$

$$= \left(\frac{(0{,}8)^0}{0!} + \frac{(0{,}8)^1}{1!} + \frac{(0{,}8)^2}{2!} \right) * e^{-0{,}8} = (1 + 0{,}8 + 0{,}32) * e^{-0{,}8} = 0{,}9526$$

$0{,}9526 = R_s(t) < R_e(t) = 0{,}99$

Tehát a rendszer nem teljesíti a követelményt.

5.2.3. Egy rendszerben egy elemet három hideg tartalékkal látunk el (n = 4). Mekkora lesz a rendszer működőképességének valószínűsége az üzembe helyezéstől a várható élettartamának feléig?

$\lambda = 10^{-6}$ 1/h

$$T = 4 * \frac{1}{\lambda} = 4 * \frac{1}{10^{-6}} = 4 * 10^6\ h$$

$$t = \frac{T}{2} = 2 * 10^6\ h$$

Tipp: passzív redundanciás példák esetén érdemes kiszámolni előre a λt szorzatot, mivel az összeadás több tagjában, illetve „e” kitevőjében is ezzel a számmal kell számolni.

$\lambda t = 10^{-6} * 2 * 10^6 = 2$

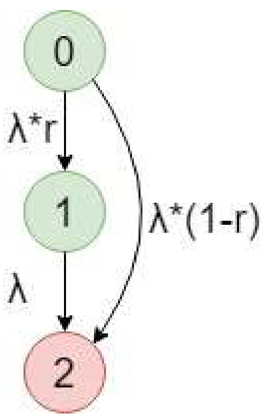
$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{i=0}^{3} \frac{(2)^i}{i!} * e^{-2} = \left(\frac{(2)^0}{0!} + \frac{(2)^1}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + \frac{(2)^3}{3!} \right) * e^{-2} =$$

$$= (1 + 2 + 2 + 1{,}333) * 0{,}1353 = 0{,}8571$$

5.3. Passzív redundancia valóságos kapcsoló alkalmazásával

5.3.1. Egy rendszerben egy azonos hideg tartalékot alkalmazok (*λ* = 4,5*10^{-6} 1/h). Az első meghibásodása esetén az elemek közötti átkapcsolást valóságos kapcsoló végzi, működőképességének valószínűsége: r_1 = 0,95. Mekkora lesz a rendszer működőképességének valószínűsége egy évvel az üzembe helyezést követően? Mekkora lenne a működőképesség valószínűsége ideális kapcsoló (r_2 = 1) alkalmazásával?

Először számítsuk ki a λt szorzatot, mivel a működőképesség valószínűségét meghatározó képletben két helyen is szükségünk lesz rá!



$\lambda t = 4{,}5 * 10^{-6} * 8760 = 0{,}03942$

A működőképesség valószínűsége ideális kapcsolóval:

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{1=0}^{1} 0{,}95^i \frac{(0{,}03942)^i}{i!} * e^{-0{,}03942} =$$

$$= \left(1 * \frac{1}{1} + 0{,}95 * \frac{0{,}03942}{1} \right) * 0{,}9613 = 0{,}9973$$

A működőképesség valószínűsége valóságos kapcsolóval:

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{1=0}^{1} \frac{(0{,}03942)^i}{i!} * e^{-0{,}03942} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{0{,}03942}{1}\right) * 0{,}9613 = 0{,}9992$$

5.3.2. Egy *n* = 3 rendszerből álló hidegtartalékolt rendszerben (ahol az elemek meghibásodási rátája *λ* = 3*10^{-5} 1/h) az elemek közötti átkapcsolást valóságos kapcsolók végzik. Teljesíti-e ez a rendszer azt, hogy bekapcsolás után *t* = 3500 órával a működőképesség valószínűsége R_k = 0,9792, ha a kapcsoló megbízóhatsága: r_1 = 0,8? Amennyiben a rendszer nem teljesíti a kívánt megbízhatósági szintet, vizsgáljuk meg, hogy az alábbi két módszer közül melyik alkalmazható: a kapcsoló megbízóhatságnak növelése r_2 = 0,9-re, vagy újabb tartalék elem alkalmazása!

Vizsgáljuk meg az első esetet:

$$\lambda t = 3 * 10^{-5} * 3{,}5 * 10^3 = 0{,}105$$

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{1=0}^{2} 0{,}8^i \frac{(0{,}105)^i}{i!} * e^{-0{,}105} =$$
$$= \left(0{,}8^0 \frac{(0{,}105)^0}{0!} + 0{,}8^1 \frac{(0{,}105)^1}{1!} + 0{,}8^2 \frac{(0{,}105)^2}{2!}\right) * e^{-0{,}105} =$$
$$= (1 + 0{,}084 + 3{,}528 * 10^{-3}) * 0{,}9003245 = 0{,}979128$$

Ebben az esetben $R_k > R_s$, azaz a fenti rendszer nem teljesíti ezt a követelményt. Nézzük meg, mi történik akkor, ha a kapcsolót egy jobb, nagyobb megbízhatóságú eszközre cserélem, azaz r_2 = 0,9!

$$(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{1=0}^{2} r^i \frac{(0{,}105)^i}{i!} * e^{-0{,}105} =$$
$$= \left(0{,}9^0 \frac{(0{,}105)^0}{0!} + 0{,}9^1 \frac{(0{,}105)^1}{1!} + 0{,}9^2 \frac{(0{,}105)^2}{2!}\right) * e^{-0{,}105} =$$
$$= (1 + 0{,}0945 + 4{,}4651 * 10^{-3}) * 0{,}9003245 = 0{,}98943$$

Ebben az esetben $R_s > R_k$, azaz a fenti rendszer már teljesíti ezt a követelményt. A biztonság kedvéért ellenőrizzük le az utolsó esetet is (*n* = 4 és r_1 = 0,8)!

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda t} = \sum_{1=0}^{3} r^i \frac{(0{,}105)^i}{i!} * e^{-0{,}105} =$$
$$= \left(0{,}8^0 \frac{(0{,}105)^0}{0!} + 0{,}8^1 \frac{(0{,}105)^1}{1!} + 0{,}8^2 \frac{(0{,}105)^2}{2!} + 0{,}8^3 \frac{(0{,}105)^3}{3!}\right) * e^{-0{,}105} =$$
$$= (1 + 0{,}084 + 3{,}528 * 10^{-3} + 9{,}8784 * 10^{-5}) * 0{,}9003245 = 0{,}97922$$

Ebben az esetben szintén $R_s > R_k$, azaz a fenti rendszer már teljesíti ezt a követelményt. Ez azt jelenti, hogy a megbízhatóság növelésére mind a két módszer alkalmas lehet, de a kapcsoló lényegesen jobb tulajdonságúra való cseréje jobban növeli a megbízhatóságot, mint egy új hidegtartalékolt elem alkalmazása.

5.4. Aktív-passzív redundancia összehasonlítása

5.4.1. Adott egy két elemből álló, passzív redundanciát tartalmazó rendszer. Hány elemet kell alkalmazni aktív redundancia formájában, hogy a működőképesség valószínűsége legalább akkora legyen, mint passzív redundancia esetében? Számítsa ki a két esetben a rendszerek várható élettartamát!

$\lambda = 3 * 10^{-6}\ {}^{1}/_{h}$

$t = 100000\ óra$

$\lambda t = 0{,}3$

$e^{-\lambda} \ = e^{-3*10^{-6}*10000} = 0{,}7408$

Passzív redundancia alkalmazása esetén:

$$R_s(t) = \sum_{1=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * e^{-\lambda} \ = \left(1 + \frac{(0{,}3)^1}{1}\right) * 0{,}7408 = 0{,}963$$

Aktív redundancia esetén ugyanezen követelmény felhasználásával:

$R_s(t) = 1 - (1 - 0{,}7408)^n$

$0{,}963 = 1 - (1 - 0{,}7408)^n$

$0{,}03696 = (1 - 0{,}7408)^n$

$-3{,}298 = n * ln(1 - 0{,}7408)$

$$n = \frac{-3{,}298}{ln(1 - 0{,}7408)} = 2{,}441 \approx 3$$

Tehát legalább 3 elemet kell alkalmazni.

A várható élettartam passzív redundancia esetében:

$$T = n * \frac{1}{\lambda} = 2 * \frac{1}{3 * 10^{-6}} = 6{,}667 * 10^5 h$$

A várható élettartam aktív redundancia esetében:

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{\lambda} = 1{,}833 * \frac{1}{3 * 10^{-6}} = 6{,}111 * 10^5 h$$

Összességében az látható, hogy passzív redundancia esetében a kívánt megbízhatósági és élettartam értékek kedvezőbbek kevesebb elem alkalmazásával. Fontos azonban, hogy a passzív rendszereknél az átkapcsolás igen időigényes is lehet, amely egyes rendszerek esetén nem engedhető meg.

5.4.2. Egy elem meghibásodási rátája λ = 5*10^{-6} 1/h. Mekkora a rendszer működőképességének és meghibásodásának valószínűsége az üzembe helyezéstől számított 70000 óra múlva, és mennyi a rendszer várható élettartama

tartalékelem nélkül?
egy hideg tartalékkal?
egy meleg tartalékkal?

a) Tartalékelem nélkül:

$R = e^{-\lambda_s t} = e^{-5*10^{-6}*7000} = 0{,}7047$

$F = 1 - 0{,}7047 = 0{,}2953$

$T = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5*10^{-6}} = 200000\ h$

b) Egy hideg tartalékkal:

$R_{s2}(t) = (1 + \lambda t) * e^{-\lambda t} = (1 + 5*10^{-6}*70000) * e^{-5*10^{-6}*70000} = 0{,}9513$

$F = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487$

$T = 2 * \frac{1}{\lambda} = 2 * \frac{1}{5*10^{-6}} = 400000\ h$

c) Egy meleg tartalékkal:

$F = 0{,}2953 * 0{,}2953 = 0{,}08720$

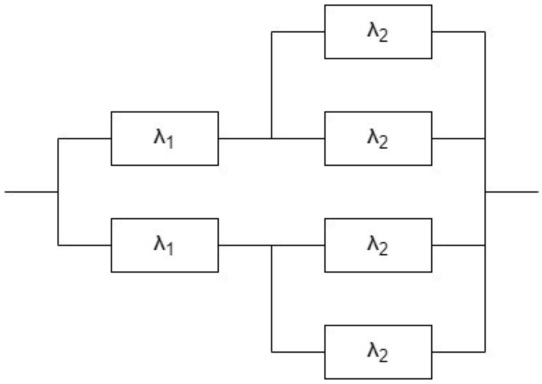
$R = 1 - 0{,}08720 = 0{,}9128$

$T = 1{,}5 * \frac{1}{\lambda} = 1{,}5 * \frac{1}{5*10^{-6}} = 300000\ h$

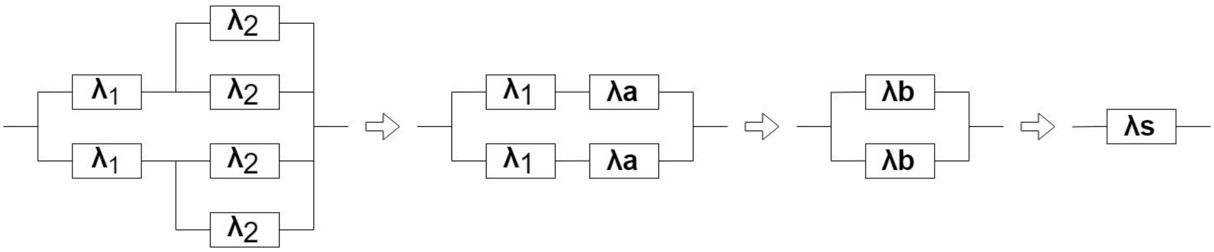
6. Vegyes rendszerek

Vegyes rendszernek nevezzük az olyan rendszereket, melyek egyaránt tartalmaznak soros, illetve (aktív vagy passzív redundancia – a példákban leggyakrabban előbbi – formájában) tartalékolt részrendendszereket. Azaz a teljes rendszer részei külön-külön vizsgálhatók. Az ilyen jellegű felbontást mindig belülről kifele haladva végezzük el, és így jutunk el a teljes rendszer megbízhatósági paramétereihez.

6.0.1. Adott az alábbi ábrán látható rendszer ($\lambda_1 = 2*10^{-6}$ 1/h, $\lambda_2 = 10^{-5}$ 1/h). Mekkora lesz a rendszer meghibásodásának valószínűsége az üzembe helyezés után 20000 órával?



A számításokat a fejezet bevezetőjében leírt módon, bentről kifele végezzük el. A legkisebb ilyen vizsgálható részrendszer két λ_2 meghibásodási rátájú elem párhuzamos kapcsolása (λ_a). A következő részrendszer λ_1 és λ_a soros kapcsolásaként fogható fel (λ_b). A teljes rendszer működőképességét pedig e két részrendszer aktív redundancia kapcsolásaként kaphatjuk meg. Végezzük el tehát a számításokat ennek megfelelően!



A λ_1 jelű elem működőképességének valószínűsége:

$$R_1(t) = e^{-\lambda_1 t} = e^{-2*10^{-6}*2*10^4} = 0{,}9608$$

A λ_2 jelű elem működőképességének valószínűsége:

$$R_2(t) = e^{-\lambda_2 t} = e^{-10^{-5}*2*10^4} = e^{-0{,}2} = 0{,}8187$$

Ez alapján a párhuzamosan kapcsolt két elem működőképességének valószínűsége:

$$F_2(t) = 1 - R_2(t) = 1 - 0{,}8187 = 0{,}1813$$

$$R_a(t) = 1 - F_2^2(t) = 1 - 0{,}1813^2 = 0{,}9671$$

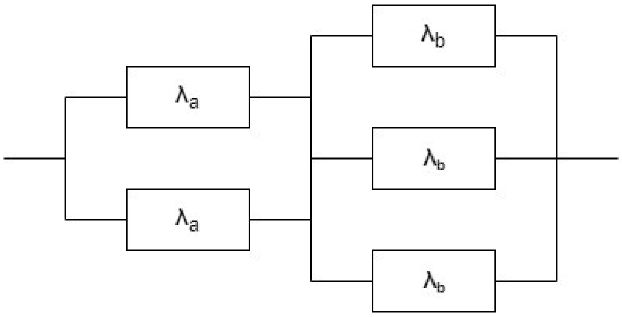
A soros fokozat működőképességének valószínűsége:

$$R_b(t) = R_1(t) * R_a(t) = 0{,}9608 * 0{,}9671 = 0{,}9292$$

Végül a teljes rendszer működőképességének valószínűsége is számítható:

$$R_s(t) = 1 - \left(1 - R_b(t)\right)^2 = 1 - (1 - 0{,}9292)^2 = 0{,}995$$

6.0.2. Adott az alábbi folyamatosan működő rendszer. A λ_a = 1,5*10^{-6} 1/h és a λ_b = 10^{-5} 1/h. Mekkora a rendszer meghibásodási valószínűsége 1 éves intervallumon? Mekkora a rendszer várható élettartama?



A λ_a jelű elem működőképességének valószínűsége:

$$R_a(t) = e^{-\lambda_a t} = e^{-1{,}5*10^{-6}*8760} = e^{-0{,}01314} = 0{,}986946$$

A λ_b jelű elem működőképességének valószínűsége:

$$R_b(t) = e^{-\lambda_b t} = e^{-1 \quad {}^{-5}*8760} = e^{-0{,}0876} = 0{,}916127$$

Az elemek párhuzamosan vannak kapcsolva, ezért:

$$F_a(t) = 1 - R_a(t) = 1 - 0{,}986946 = 0{,}013054$$

$$F_b(t) = 1 - R_b(t) = 1 - 0{,}916127 = 0{,}083872$$

A teljes rendszer két blokk soros kapcsolatából áll, ahol az első blokk az „a” elemek párhuzamos kapcsolata, míg a második blokk a „b” elemek párhuzamos kapcsolata.

Ezért:

$$R_1(t) = 1 - F_a^2(t) = 1 - 0{,}013054^2 = 0{,}99983$$

$$R_2(t) = 1 - F_b^3(t) = 1 - 0{,}083872^3 = 0{,}99941$$

Ez alapján a teljes rendszer (az első és a második blokk soros kapcsolatának) meghibásodási valószínűsége:

$$F_s(t) = 1 - R_1(t) * R_2(t) = 1 - 0{,}99983 * 0{,}99941 = 0{,}000759$$

A rendszer működőképességi valószínűsége:

$$R_s(t) = R_1(t) * R_2(t) = 0{,}99983 * 0{,}99941 = 0{,}99924$$

A rendszer várható élettartama:

$$T = \frac{1}{\lambda_s}$$

Ebben az egyenletben λ_s nem ismert, de meghatározható:

$$R_s(t) = e^{-\lambda_s t}$$

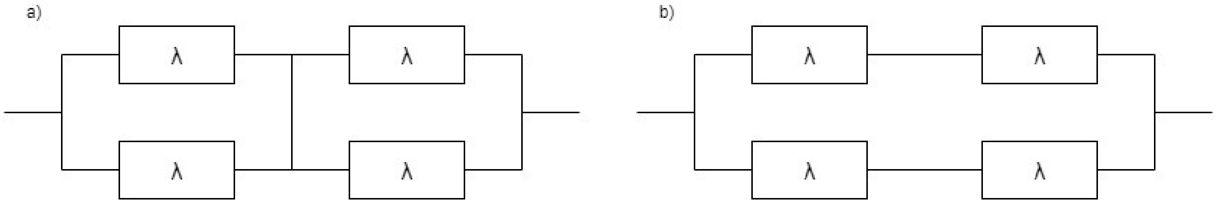
$$0{,}99924 = e^{-\lambda_s 8760}$$

$$ln0{,}99924 = -\lambda_s * 8760$$

$$\lambda_s = -\frac{ln0{,}99924}{8760} = 8{,}679 * 10^{-8}\ 1/h$$

$$T = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{8{,}679 * 10^{-8}} = 11521935{,}23\ óra = 1315{,}2894\ év$$

6.0.3. Azonos megbízhatósági tulajdonságú (λ = 10^{-5} 1/h) elemeket alkalmazva melyik elrendezés működőképességének valószínűsége lesz nagyobb az üzembe helyezést követő 1 éven belül? Válaszát számítással igazolja!



Két párhuzamos sorba kötve.

$$R_1 = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 = 1 - (1 - e^{-10^{-5}*8760})^2 = 1 - (1 - 0{,}9161)^2 = 0{,}993$$

$$R_s = R_1 * R_1 = 0{,}993 * 0{,}993 = 0{,}986$$

Két soros párhuzamosan kötve.

$$R_1 = (e^{-\lambda t})^2 = (e^{-1\ ^{-5}*8760})^2 = (0{,}9161)^2 = 0{,}8392$$

$$R_s = 1 - (1 - R_1)^2 = 1 - (1 - 0{,}8392)^2 = 0{,}9742$$

Tehát a működőképesség valószínűsége az a) esetben nagyobb.

A példával bizonyítottuk, hogy elemek vagy fokozatok tartalékolásával nagyobb megbízhatóságot lehet elérni a teljes rendszer tartalékolásával szemben.

Az eredmény várható volt, hiszen az első esetben a tartalékelemek egymástól függetlenül hibásodhatnak meg, míg a második esetben bármely elem meghibásodásával az egész fokozat működésképtelen lesz.

6.0.4. Egy λ = 2*10^{-5} 1/h meghibásodási rátával rendelkező elemből kettő darabot megbízhatóság szempontjából sorosan alkalmazunk. Hány ilyen fokozatot kell alkalmaznunk párhuzamos redundancia formájában, hogy a működőképesség valószínűsége az üzembe helyezést követő 10000 óra múlva ne legyen kisebb, mint egy elem esetében?

$$R = e^{-\lambda_s t} = e^{-2*10^{-5}*10000} = 0{,}8187$$

$$R = e^{-2*\lambda_s t} = e^{-2*2*10^{-5}*10000} = 0{,}6703$$

$$F = 1 - 0{,}8187 = 0{,}1813$$

$$F = 1 - 6703 = 0{,}3297$$

$$0{,}3297^n = 0{,}1813$$

$$n = \frac{ln0{,}1813}{ln0{,}3297} = 1{,}539$$

Tehát kettőt kell párhuzamosan kötni.

2. rész

7. A „k az n-ből” rendszerek

7.1. Aktív „k az n-ből” rendszerek

7.1.1. Egy rendszer háromból kettes szavazólogikával működik. Mekkora a működőképesség valószínűsége a [0; t] intervallumban? Mekkora a rendszer meghibásodásának valószínűsége a [0; t] intervallumban? Mekkora a rendszer várható élettartama?

$\lambda = 10^{-5}\, {}^{1}/_{h}$

$t = 10^4\ h$

$n = 3$

$k = 2$

$R_s(t) = ?$

$F_S(t) = ?$

$T = ?$

Mivel a későbbi számításainkat megkönnyíti, számoljuk ki először egy elem működőképességének, illetve meghibásodásának valószínűségét az adott időintervallumra!

$R(t) = e^{-\lambda} \ = e^{-10^{-5}*10^4} = e^{-0,1} = 0,9048$

$F(t) = 1 - R(t) = 1 - 0,9048 = 0,09516$

Ezek után a binomiális tétel alapján felírt képlettel számítható a teljes rendszer működőképességének valószínűsége.

$$R_S(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{n-i} = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{3-i} =$$

$$= \binom{3}{2} R^2(t) * [1 - R(t)]^{3-2} + \binom{3}{3} R^3(t) * [1 - R(t)]^{3-3} =$$

$$= \frac{3!}{2! * (3-2)!} * R^2(t) * [1 - R(t)] + \frac{3!}{3! * (3-3)!} * R^3(t) * 1 =$$

$$= \frac{3 * \cancel{2} * 1}{\cancel{2} * 1 * 1} * 0,9048^2 * 0,09516 + \frac{\cancel{3} * \cancel{2} * 1}{\cancel{3} * \cancel{2} * 1 * 1} * 0,9048^3 =$$

$$= 3 * 0,9048^2 * 0,09516 + 0,9048^3 = 0,9744$$

Gyakorlásképpen a meghibásodás valószínűségét is a tanult képlet alapján számoljuk ki, majd számításainkat ellenőrizzük az ismert $F(t) + R(t) = 1$ összefüggés alapján.

$$F_S(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} [1 - F(t)]^i(t) * F^{n-i}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{3}{i} R^i(t) * F^{n-i}(t) = \sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{3-i}$$

$$= \binom{3}{0} R^0(t) * F^{3-0}(t) + \binom{3}{1} R^1(t) * F^{3-1}(t) =$$

$$= \frac{3!}{0! * (3-0)!} * 1 * F^3(t) + \frac{3!}{1! * (3-1)!} * R^1(t) * F^2(t) =$$

$$= \frac{3!}{0! * (3-0)!} * 1 * F^3(t) + \frac{3!}{1! * (3-1)!} * R^1(t) * F^2(t) =$$

$$= \frac{\cancel{3} * \cancel{2} * 1}{1 * \cancel{3} * \cancel{2} * 1} * 0{,}09516^3 + \frac{3 * \cancel{2} * 1}{1 * \cancel{2} * 1} * 0{,}9048 * 0{,}09516^2 =$$

$$= 0{,}09516^3 + 3 * 0{,}9048 * 0{,}09516^2 = 0{,}02544$$

Ellenőrizzük számításainkat!

$$F_S(t) = 1 - R_S(t) = 1 - 0{,}9744 = 0{,}0256$$

A két eltérő módon kiszámított érték közel azonos, így számításunk helyesnek tekinthető.

Végül számítsuk ki a rendszer várható élettartamát!

$$T = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{i} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{6} * \frac{1}{10^{-5}} = 83333\ h$$

7.1.2. Egy kisvárosban minimálisan három autóbusz szükséges egy helyijárat menetrendszerű teljesítéséhez. A város közlekedési társasága a menetrendet mégis naponta mind a négy autóbuszával biztosítja. Mekkora valószínűséggel fog az üzembehelyezést követően két évvel menetrend szerint közlekedni a helyijárat, ha a buszok naponta átlagosan 16 órát futnak?

$$\lambda = 5 * 10^{-6}\ {}^1\!/_h$$

$$t = 2 * 365 * 16 = 11680\ h$$

$$n = 4$$

$$k = 3$$

$$R_s(t) = ?$$

Mivel minden nap minden autóbusz forgalomban van, így ezt a rendszert tekinthetjük aktív 3 a 4-ből rendszernek. Számításainkat is ennek megfelelően végezzük. Egy elem működőképességének valószínűsége:

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-5*10^{-6}*11680} = e^{-0{,}0584} = 0{,}9433$$

A teljes rendszerre:

$$R_S(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{n-i} = \sum_{i=3}^{4} \binom{4}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{4-i} =$$

$$= \binom{4}{3} R^3(t) * [1 - R(t)]^{4-3} + \binom{4}{4} R^4(t) * [1 - R(t)]^{4-4} =$$

$$= \frac{4!}{3! * (4-3)!} * R^3(t) * [1 - R(t)] + \frac{4!}{4! * (4-4)!} * R^4(t) * 1 =$$

$$= \frac{4 * \cancel{3} * \cancel{2} * 1}{\cancel{3} * \cancel{2} * 1 * 1} * 0{,}9433^3 * [1 - 0{,}9433] + \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!} * 0!} * 0{,}9433^4 =$$

$$= 4 * 0{,}9433^3 * [1 - 0{,}9433] + 0{,}9433^4 = 0{,}9821$$

7.1.3. Egy rendszer 3-ból 2-es aktív redundanciával működik. Az egyes elemek meghibásodási rátája $\lambda = 3{,}2*10^{-4}$ 1/h. Mekkora a rendszer működési valószínűsége az üzembe helyezéstől számított 500 óra múlva? Mennyi a rendszer várható élettartama?

$\lambda = 3{,}2 * 10^{-4}\ {}^{1}/_{h}$

$t = 500\ h$

$n = 3$

$k = 2$

$R_s(t) = ?$

$T = ?$

Egy elem működőképességének valószínűsége az adott időintervallumon:

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-3{,}2*10^{-4}*500} = e^{-0{,}16} = 0{,}8521$$

A teljes rendszer működőképességének valószínűsége az adott időintervallumon:

$$R_S(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{n-i} = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} R^i(t) * [1 - R(t)]^{3-i} =$$

$$= \binom{3}{2} R^2(t) * [1 - R(t)]^{3-2} + \binom{3}{3} R^3(t) * [1 - R(t)]^{3-3} =$$

$$= \frac{3!}{2! * (3-2)!} * R^2(t) * [1 - R(t)] + \frac{3!}{3! * (3-3)!} * R^3(t) * 1 =$$

$$= \frac{3 * \cancel{2} * 1}{\cancel{2} * 1 * 1} * 0{,}8521^2 * (1 - 0{,}8521) + \frac{\cancel{3} * \cancel{2} * 1}{\cancel{3} * \cancel{2} * 1 * 1} * 0{,}8521^3 =$$

$$= 3 * 0{,}8521^2 * 0{,}1479 + 0{,}8521^3 = 0{,}9409$$

A rendszer várható élettartama:

$$T = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{\lambda} * \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{i} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{6} * \frac{1}{3{,}2 * 10^{-4}} = 2604\ h$$

7.2. Passzív „k az n-ből” rendszerek

7.2.1. Adott egy passzív háromból kettes rendszer. Mekkora a működőképesség valószínűsége az üzemeltetés kezdete és az élettartam fele közötti intervallumban?

$\lambda = 10^{-6}\ {}^{1}/_{h}$

$t = T/2$

$n = 3$

$k = 2$

$R_s(t) = ?$

Ahhoz, hogy a működőképesség valószínűségét meg tudjuk határozni, először a várható élettartamot kell kiszámítanunk. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

$$T = \frac{n-k+1}{k} * \frac{1}{\lambda} = \frac{3-2+1}{2} * \frac{1}{10^{-6}} = 1 * 10^6\ h$$

Ez alapján a vizsgált intervallum hossza:

$$t = \frac{T}{2} = 5 * 10^5\ h$$

A működőképesség valószínűségének meghatározásához számítsuk ki a $k\lambda t$ szorzatot!

$$k\lambda t = 2 * 10^{-6} * 5 * 10^5 = 1$$

Megjegyzés: A várható élettartam kiszámítása nélkül is eredményre juthatunk:

$$k\lambda t = 2 * \frac{1}{T} * \frac{T}{2} = 1$$

Ezt követően a működőképesség valószínűsége passzív k az n-ből rendszerek esetén a következőképpen számolható:

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{3-2} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{1} \frac{(1)^i}{i!} * e^{-1} =$$

$$= \left(\frac{(1)^0}{0!} + \frac{(1)^1}{1!}\right) * e^{-1} = (1+1) * e^{-1} = 2 * 0{,}3679 = 0{,}7358$$

7.2.2. Egy személyautó kerekeinek meghibásodási rátái adottak. Az autó egy darab, a többivel azonos kialakítású pótkerékkel ($\lambda = 7*10^{-7}$ 1/h) rendelkezik. Mekkora lesz az autó gurulóképességének (a kerekekből álló rendszer működőképességének) valószínűsége az üzembehelyezést követő 2 év használat során? Mekkora lesz a rendszer várható élettartama?

$$\lambda = 7 * 10^{-7}\ {}^{1}/_{h}$$

$$t = 2\ év = 2 * 8760 = 17520$$

$$n = 5$$

$$k = 4$$

$$R_s(t) = ?$$

Egy személyautónak négy kerékre van szüksége a működéshez, így az igénybe nem vett pótkerékkel együtt egy passzív 4 az 5-ből rendszerről van szó.

$$k\lambda t = 4 * 7 * 10^{-7} * 17520 = 0{,}04906$$

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{5-4} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{1} \frac{(0{,}04906)^i}{i!} * e^{-0{,}04906} =$$

$$= \left(\frac{(0{,}04906)^0}{0!} + \frac{(0{,}04906)^1}{1!}\right) * e^{-0{,}04906} = (1 + 0{,}04906) * e^{-0{,}04906} = 0{,}9988$$

A várható élettartam:

$$T = \frac{n-k+1}{k} * \frac{1}{\lambda} = \frac{5-4+1}{4} * \frac{1}{7 * 10^{-7}} = 7{,}143 * 10^5\ h$$

7.2.3. Egy rendszer 4-ből 2-es, passzív redundanciával működik. Egy-egy elem meghibásodási rátája λ = 10^{-5} 1/h. Mekkora a rendszer meghibásodásának valószínűsége az üzembehelyezéstől számított 20000 óra múlva? Mekkora a rendszer várható élettartama?

$\lambda = 10^{-5}\, {}^{1}\!/\!{}_{h}$

$t = 20000$

$n = 4$

$k = 2$

$R_s(t) = ?$

$k\lambda t = 2 * 10^{-5} * 20000 = 0{,}4$

$$R_s(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{4-2} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} * e^{-k\lambda t} = \sum_{i=0}^{2} \frac{(0{,}4)^i}{i!} * e^{-0{,}4} =$$

$$= \left(\frac{(0{,}4)^0}{0!} + \frac{(0{,}4)^1}{1!} + \frac{(0{,}4)^2}{2!} \right) * e^{-0{,}4} = (1 + 0{,}4 + 0{,}08) * e^{-0{,}4} = 0{,}9921$$

A várható élettartam:

$$T = \frac{n-k+1}{k} * \frac{1}{\lambda} = \frac{4-2+1}{2} * \frac{1}{10^{-5}} = 1{,}5 * 10^5\ h$$

8. Válogatott példák a működőképesség valószínűségének meghatározására

8.0.1. Hasonlítsuk össze a működőképesség valószínűsége szempontjából a biztonságkritikus rendszereknél alkalmazott 2x(2-ből 2) és 3-ból 2-es architektúrákat! Rendelkezzenek az alkalmazott számítógépek azonos megbízhatósági tulajdonságokkal!

$\lambda = 10^{-7}\, {}^{1}\!/_{h}$

$t = 10^{6} h$

Egy elemre:

$R = e^{-\lambda t} = e^{-10^{-7} * 10^{6}} = e^{-0,1} = 0,9048$

$F = 1 - R = 1 - 0,9048 = 0,09516$

Megbízhatóság szempontjából a 2x(2-ből 2) rendszer egy soros fokozat párhuzamos tartalékát jelenti (vegyes rendszer).

$\lambda_S = 2 * \lambda = 2 * 10^{-7} 1/h$

$R = e^{-\lambda_s t} = e^{-2*10^{-7}*10^{6}} = e^{-0,2} = 0,8187$

$F = 1 - R = 1 - 0,8187 = 0,1813$

$F_S = F^2 = 0,1813^2 = 0,03286$

$R_S = 1 - F_S = 1 - 0,03286 = 0,9671$

Most számoljuk ki a 3-ból 2 rendszer működőképességének valószínűségét!

$$R_S = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} R^i (1-R)^{3-i} =$$

$$= \left(\frac{3!}{2! * (3-2)!} * 0,9048^2 * 0,09516^1\right) + \left(\frac{3!}{3! * (3-3)!} * 0,9048^3 * 0,09516^0\right) =$$

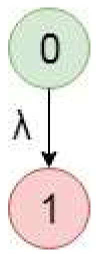
$$= (3 * 0,9048^2 * 0,09516) + (0,9048^3) = 0,9744$$

A figyelembe vett időintervallumon a 3-ból 2-es rendszer mutat nagyobb működőképességet.

9. Markov modellek

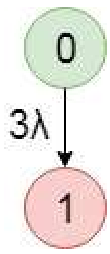
9.0.1. Rajzolja fel az eddig tanult rendszerek (egy elem, három elemre: soros rendszer, aktív és passzív redundancia, aktív és passzív „*k* az *n*-ből” rendszer [*k* = 2]) Markov-gráfját, és írja fel az átmeneti mátrixokat!

Egy elem ($n = 1$, $k = 1$)



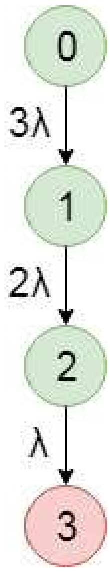
$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Soros rendszer ($n = 3$, $k = 3$)



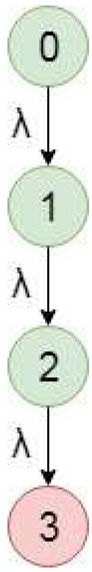
$$\begin{bmatrix} -3\lambda & 0 \\ 3\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Aktív redundancia ($n = 3$, $k = 1$)



$$\begin{bmatrix} -3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Passzív redundancia ($n = 3$, $k = 1$)



$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Aktív „*k* az *n*-ből” rendszer ($n = 3$, $k = 2$)

$$\begin{bmatrix} -3\lambda & 0 & 0 \\ 3\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Passzív „*k* az *n*-ből” rendszer ($n = 3$, $k = 2$)

$$\begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 2\lambda & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

9.0.2. Adott egy rendszer differenciálegyenlet-rendszere. Írjuk fel ez alapján a rendszer átmeneti mátrixát és rajzoljuk fel állapotgráfját!

$P_0' = -P_0 * (10^{-6} + 10^{-9}) + P_1 * 10^{-1} + P_2 * 10^{-3}$

$P_1' = P_0 * 10^{-6} - P_1 * 10^{-1}$

$P_2' = P_0 * 10^{-9} - P_2 * 10^{-3}$

A differenciálegyenlet-rendszer három egyenletből áll, tehát a rendszer is három állapottal rendelkezik, és ennek megfelelően a keresett átmeneti mátrix egy 3x3-as mátrix lesz.

$P_0' = -P_0 * (10^{-6} + 10^{-9}) + P_1 * 10^{-1} + P_2 * 10^{-3}$

$P_1' = P_0 * 10^{-6} - P_1 * 10^{-1} + P_2 * 0$

$P_2' = P_0 * 10^{-9} + P_1 * 0 + P_2 - P_2 * 10^{-3}$

Írjuk át az egyenletrendszert mátrixos formára!

$$\underline{P'} = \begin{bmatrix} -(10^{-6} + 10^{-9}) & 10^{-1} & 10^{-3} \\ 10^{-6} & -10^{-1} & 0 \\ 10^{-9} & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix} * \underline{P}$$

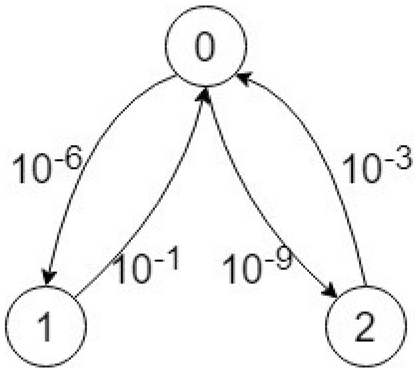
A fenti átírásból adódik az állapotátmeneti mátrix:

$$\begin{bmatrix} -(10^{-6} + 10^{-9}) & 10^{-1} & 10^{-3} \\ 10^{-6} & -10^{-1} & 0 \\ 10^{-9} & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük a kitöltést az átmeneti mátrixról tanultak alapján!

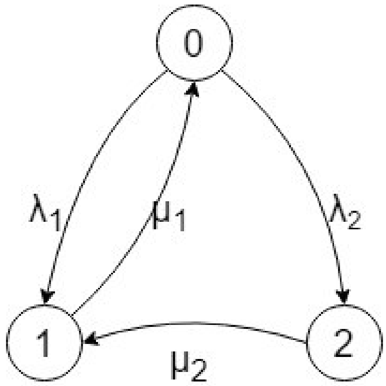
- ✓ A főátlóban csak nempozitív értékek szerepelnek.
- ✓ A mátrix oszlopösszegei nullát adnak eredményül.

A mátrix felvételével az állapotgráf már könnyen megszerkeszthető. Látható, hogy a P_0 állapotból P_1-be és P_2-be is el lehet jutni. E két állapotból azonban csak P_0-ba mehetünk.

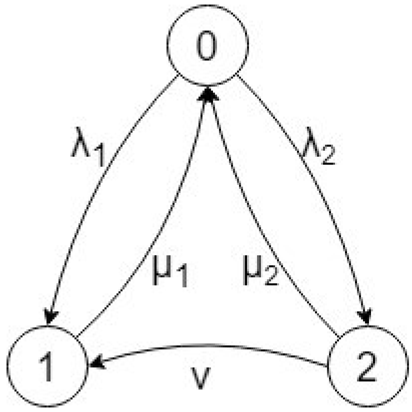


9.0.3. Rajzolja fel az együtthatómátrixával megadott rendszer megbízhatósági állapotgráfját!

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

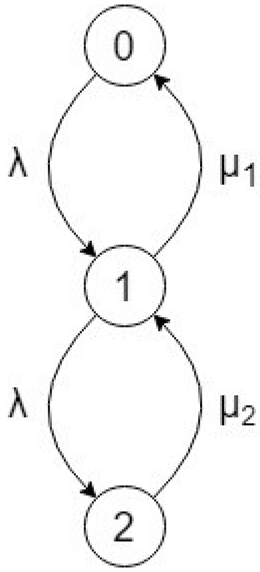


9.0.4. Írja fel az állapotgráffal megadott rendszer átmeneti mátrixát!



$$\begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_1 & -\mu_1 & \nu \\ \lambda_2 & 0 & -\mu_2-\nu \end{bmatrix}$$

9.0.5. Adott az alábbi állapotgráffal jellemzett rendszer, és a hozzátartozó átmeneti ráták. Mekkora lesz az egyes állapotokban való tartózkodás valószínűsége?

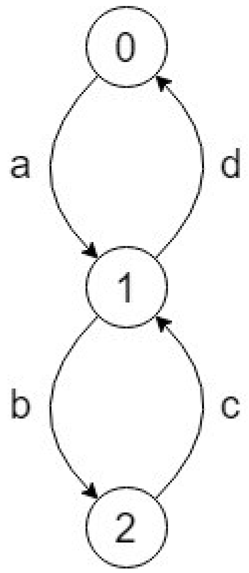


$\lambda = 10^{-6}\ {}^{1}/_{h}$

$\mu_1 = 10^{-1}\ {}^{1}/_{h}$

$\mu_2 = 10^{-3}\ {}^{1}/_{h}$

A gyakorlatokon tanultak alapján ismert, hogy egy ilyen háromállapotú rendszer állapotának valószínűségei hogyan számolhatók. Az összefüggések alább láthatók.



$$P_0 = \frac{cd}{ab + ac + cd}$$

$$P_{\mathbf{1}} = \frac{a\boldsymbol{c}}{ab + ac + cd}$$

$$P_{\mathbf{2}} = \frac{ab}{ab + ac + cd}$$

Ezek alapján számoljuk ki a vizsgált rendszer egy-egy állapotában való tartózkodás valószínűségét!

Tipp: érdemes a számolást a nevező tagjainak egyenkénti kiszámolásával kezdeni, mivel ezeket a későbbiekben fel fogjuk használni.

$cd = \mu_1 * \mu_2 = 10^{-1} * 10^{-3} = 10^{-4}$

$ac = \lambda * \mu_2 = 10^{-6} * 10^{-3} = 10^{-9}$

$ab = \lambda^2 = (10^{-6})^2 = 10^{-12}$

Most számoljuk ki összegüket, mely a nevezőhöz fog kelleni!

$N = cd + ac + ab = 10^{-4} + 10^{-9} + 10^{-12} = 1{,}00001001 * 10^{-4}$

Ezután az állapotvalószínűségek már könnyen számíthatók.

$$P_0 = \frac{\mu_1 * \mu_2}{N} = \frac{10^{-4}}{1{,}00001001 * 10^{-4}} = 0{,}99999$$

$$P_1 = \frac{\lambda * \mu_2}{N} = \frac{10^{-9}}{1{,}00001001 * 10^{-4}} = 9{,}9999 * 10^{-6}$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{N} = \frac{10^{-1}}{1{,}00001001 * 10^{-4}} = 9{,}9999 * 10^{-9}$$

Ellenőrizzük számításainkat!

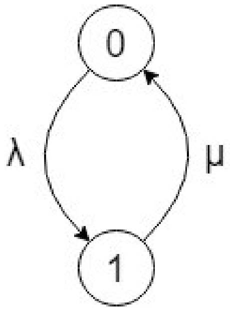
$P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}99999 + 9{,}9999 * 10^{-6} + 9{,}9999 * 10^{-9} = 1$

10. Javítható rendszerek

10.0.6. Adott az alábbi állapotgráffal jellemzett rendszer. A Markov modell alapján igazoljuk, hogy a rendszer tartós készenléte ténylegesen megegyezik az A_{ss} = MTBF/(MTBF + MTTR) kifejezéssel!

A rendszer állapotátmeneti mátrixa és állapotgráfja:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & +\mu \\ +\lambda & -\mu \end{bmatrix}$$



A feladat legelején mutassuk meg A_{ss} értékét!

$$A_{ss} = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\mu + \lambda}{\lambda * \mu}} = \frac{1}{\lambda} * \frac{\lambda * \mu}{\mu + \lambda} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

A folytatásban a bizonyításhoz szükséges a modell teljes megoldása.

Első lépésként írjuk fel a differenciálegyenlet-rendszert!

$$P_0'(t) = -\lambda * P_0(t) + \mu * P_1(t)$$

$$P_1'(t) = +\lambda * P_0(t) - \mu * P_1(t)$$

A második lépésben a differenciálegyenlet-rendszer megoldásához vegyük az egyenletek Laplace-transzformáltjait a következő kezdeti feltételekkel: $P_0(0) = 1$, illetve $P_1(0) = 0$.

$$sP_0(s) - 1 = -\lambda * P_0(s) + \mu * P_1(s)$$

$$sP_1(s) - 0 = +\lambda * P_0(s) - \mu * P_1(s)$$

Fejezzük ki az első egyenletből $P_0(s)$-t!:

$$sP_0(s) = 1 - \lambda * P_0(s) + \mu * P_1(s)$$

$$sP_0(s) + \lambda * P_0(s) = 1 + \mu * P_1(s)$$

$$(s + \lambda) * P_0(s) = 1 + \mu * P_1(s)$$

$$P_0(s) = \frac{1 + \mu * P_1(s)}{s + \lambda}$$

Az így kapott eredményt helyettesítsük be a $P_1(s)$ egyenletébe, és fejezzük ki $P_1(s)$-t!

$$sP_1(s) = \lambda * \frac{1 + \mu * P_1(s)}{s + \lambda} - \mu * P_1(s)$$

$$(s + \mu) * P_1(s) = \frac{\lambda + \lambda * \mu * P_1(s)}{s + \lambda}$$

$$(s + \mu) * (s + \lambda) * P_1(s) = \lambda + \lambda * \mu * P_1(s)$$

$$(s + \mu) * (s + \lambda) * P_1(s) - \lambda * \mu * P_1(s) = \lambda$$

$$P_1(s) * [(s + \mu) * (s + \lambda) - \lambda * \mu] = \lambda$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{(s+\mu)*(s+\lambda) - \lambda*\mu}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{s^2 + s*\lambda + s*\mu + \lambda*\mu - \lambda*\mu}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{s^2 + s*\lambda + s*\mu +}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{s*(s+\lambda+\mu)}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{s+\mu+\lambda} * \frac{1}{s}$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be, hogy $a = \lambda + \mu$, így:

$$P_1(s) = \lambda * \frac{1}{s+a} * \frac{1}{s}$$

A következő lépésben vegyük a fenti egyenlet inverz Laplace-transzformáltját a reziduumtétel segítségével. Az nevező polinom gyökei 0, és $-a$ (azaz s azon lehetséges értékei, amikor a nevező zérus).

$$P_1(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{\lambda}{s(s+a)} e^{st} + \lim_{s \to -a} (s+a) \frac{\lambda}{s(s+a)} e^{st}$$

$$P_1(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\lambda}{s+a} e^{st} + \lim_{s \to -a} \frac{\lambda}{s} e^{st}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{a} e^{0t} + \frac{\lambda}{-a} e^{-a}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a} e^{-at}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{a} (1 - e^{-at})$$

Helyettesítsük be a értékét:

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

Mivel:

$$P_0(t) = 1 - P_1(t), ezért:$$

$$P_0(t) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

Alakítsuk át a kapott eredményt! (A fenti eredmény úgy is megkapható, hogy a második egyenletből kifejezzük $P_1(s)$ értékét, és ezt helyettesítjük be a $P_0(s)$ egyenletébe. A megoldási folyamat hasonló a bemutatotthoz, ellenőrzésképpen javasolt a levezetés.)

$$P_0(t) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t})$$

$$P_0(t) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Az így kapott egyenlet a pillanatnyi készenlét függvényét - $A(t)$ adja meg a feladat elején megadott modell esetére. A tartós készenlét (A_{ss}) oly módon számítható, hogy vesszük a pillanatnyi készenlét végtelenben vett határértékét.

$$A_{ss} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right] = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

A példa elején megadott A_{ss} érték megegyezik a kapott A_{ss} értékkel, ezért ily módon igazoltuk a feladat állítását. ☺

10.0.1. Egy elem átlagosan 10 évenként egyszer romlik el, javítása (a ki és visszaszereléssel együtt) kb. 10 óra alatt elvégezhető. Mennyi lesz az adott elem meghibásodási és javítási rátájának értéke? Hosszú távon mekkora valószínűséggel fog az elem rendelkezésre állni?

A feladatban megadott értékek az elem meghibásodásai között eltelő átlagos időtartam („Mean Time Between Failures" = MTBF) és az elem átlagos javítási időtartama („Mean Time To Repar" = MTTR).

$$MTBF = 10\ év = 87600\ h$$

$$MTTR = 10\ h$$

Ezek az értékek rendre megegyeznek az elem meghibásodási, illetve javítási rátájának reciprokával.

$$\lambda = \frac{1}{MTBF} = \frac{1}{87600} = 1{,}142 * 10^{-5} \frac{1}{h}$$

$$\mu = \frac{1}{MTTR} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \frac{1}{h}$$

Az elem hosszútávú rendelkezésre állása megegyezik a tartó készenléttel.

$$A_{ss} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}1}{1{,}142 * 10^{-5} + 0{,}1} = 0{,}9999$$

10.0.2. Egy javítható rendszer MTBF értéke 10000 óra. Mekkora legyen a rendszer javítási rátája, hogy a rendszer tartós készenléte 99,99%-os legyen?

$$MTBF = 10000\ h$$

$$A_{ss} = 0{,}9999$$

$$\mu = ?$$

Fejezzük ki a tartós készenlét képletéből a javítási rátát!

$$A_{ss} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$A_{ss} * \lambda + A_{ss} * \mu = \mu$$

$$A_{ss} * \lambda = \mu - A_{ss} * \mu$$

$$\mu = \frac{A_{ss} * \lambda}{1 - A_{ss}} = \frac{A_{ss} * \frac{1}{MTBF}}{1 - A_{ss}} = \frac{0{,}9999 * \frac{1}{10000}}{1 - 0{,}9999} = 0{,}9999 \frac{1}{h}$$

10.0.3. Egy javítható rendszer μ = 0,2 1/h javítási rátával rendelkezik. A rendszer tartós készenlétének értéke: A_{ss} = 0,9. Mekkora a rendszer meghibásodási rátája? Mekkora lesz a rendszer rendelkezésre állása az üzembe helyezést követő 1 óra múlva?

$$\mu = 0{,}2\ \frac{1}{h}$$

$$A_{ss} = 0{,}9$$

$$\lambda = ?$$

$$t = 1\ h$$

$$A(t) = ?$$

Fejezzük ki a tartós készenlét képletéből a meghibásodási rátát!

$$A_{ss} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$A_{ss} * \lambda + A_{ss} * \mu = \mu$$

$$A_{ss} * \lambda = \mu - A_{ss} * \mu$$

$$\lambda = \frac{\mu * (1 - A_{ss})}{A_{ss}} = \frac{0{,}2 * (1 - 0{,}9)}{0{,}9} = 0{,}02222\frac{1}{h}$$

Az adott időpontban való készenlét a következőképpen számítható (az $A_{ss} + U_{ss} = 1$ összefüggés felhasználásával).

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} * e^{-(\lambda+\mu)t} = A_{ss} + U_{ss} * e^{-(\lambda+\mu)t} = 0{,}9 + 0{,}1 * e^{-(0{,}02222 \quad ,2)1} = 0{,}9801$$

10.0.4. Szeretnénk, hogy egy javítható rendszer legalább az idő 2/3 részében rendelkezésünkre álljon. A rendszer λ = 3*10^{-4} 1/h értékkel rendelkezik. Mekkora legyen a rendszer MTTR értéke?

$$A_{ss} = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = 3 * 10^{-4}\frac{1}{h}$$

$$MTTR = ?$$

Fejezzük ki az MTTR értéket a tartós készenlét képletéből!

$$A_{ss} = \frac{MTBF}{MTTR + MTBF}$$

$$MTTR = \frac{MTBF}{A_{ss}} - MTBF = \frac{\frac{1}{\lambda}}{A_{ss}} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{3 * 10^{-4}}}{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3 * 10^{-4}} = 1667\ h$$

Tehát lefeljebb 1667 óra lehet a rendszer MTTR értéke.

10.0.5. Egy rendszer javítási rátája 10^{-3} 1/h értéket vesz fel. A rendszer tartós rendelkezésre nem állásának valószínűsége 10%. Mekkora a meghibásodási ráta? Az üzembe helyezést követően mennyi idővel lesz a pillanatnyi készenlét 95%-os valószínűségű? Rajzolja fel az üzemképesség/üzemképtelenség alakulását az időben!

$\mu = 10^{-3} \frac{1}{h}$

$U_{ss} = 0{,}1$

$\lambda = ?$

$A(t) = 0{,}95$

$t = ?$

Fejezzük ki a tartós rendelkezésre nem állás képletéből a meghibásodási rátát!

$$U_{ss} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$\lambda = \frac{\mu * U_{ss}}{1 - U_{ss}} = \frac{10^{-3} * 0{,}1}{1 - 0{,}1} = 1{,}111 * 10^{-4} \frac{1}{h}$$

A kiszámolt meghibásodási ráta segítségével határozzuk meg a keresett *t* időpontot!

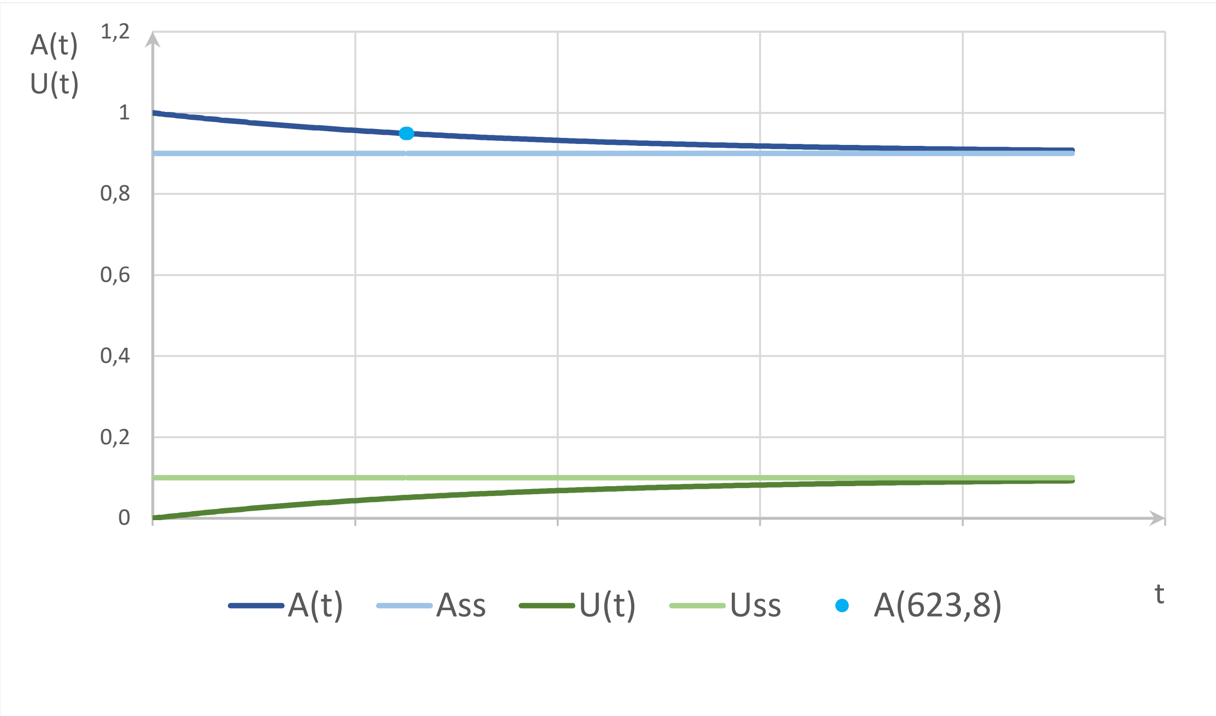
$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} * e^{-(\lambda+\mu)t} = A_{ss} + U_{ss} * e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$\frac{A(t) - A_{ss}}{U_{ss}} = e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$ln\left(\frac{A(t) - A_{ss}}{U_{ss}}\right) = -(\lambda + \mu)t$$

$$t = \frac{ln\left(\frac{A(t) - A_{ss}}{U_{ss}}\right)}{-(\lambda + \mu)} = \frac{ln\left(\frac{0{,}95 - 0{,}9}{0{,}1}\right)}{-(1{,}111 * 10^{-4} + 10^{-3})} = 623{,}8\ h \approx 26\ nap$$

Ábrázoljuk a kapott függvényeket diagramon!



10.0.6. Egy javítható rendszer kezdetben 60%-os valószínűséggel működik. Mekkora lesz a rendszer rendelkezésre állása 10 óra múlva? Ábrázolja a rendszer készenlétét az idő függvényében!

$\lambda = 10^{-4}\,{}^{1}\!/_{h}$

$\mu = 10^{-1}\,{}^{1}\!/_{h}$

$t = 10\ h$

$\propto = 0{,}6$

$A(t) = ?$

$A_{ss} = ?$

Az egyszerűség kedvéért érdemes először A_{ss}-t kiszámolni.

$$A_{ss} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{10^{-1}}{10^{-4} + 10^{-1}} = 0{,}999$$

Ha a rendszer üzembe helyezéskor α valószínűséggel működőképes, akkor a pillanatnyi rendelkezésre állás a következőképpen számítható:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \left(\propto - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) * e^{-(\lambda+\mu)t} = A_{ss} + (\propto - A_{ss}) * e^{-(\lambda+\mu)t} =$$

$$= 0{,}999 + (0{,}6 - 0{,}999) * e^{-(10^{-1}+1\ ^{-4})10} = 0{,}999 + (-0{,}399) * e^{-1{,}001} = 0{,}8524$$

Ábrázoljuk a kapott függvényeket diagramon!