Logikai hálózatok

Dr. Bede Zsuzsanna

bede.zsuzsanna@mail.bme.hu

St. I. em. 104.

Követelmények

- Tanszéki honlap: www.kjit.bme.hu/hallgatoknak/bsc-targyak-3/logikai-halozatok
- Gyakorlatok:

hétfő +	08:15-10:00	J 208
kedd +	14:15-16:00	St 321B
kedd #	14:15-16:00	St 321B

- HF:
  - 14. hétig
- 2 ZH:
  - Pótlás a pótlási héten
- Félévközi jegy
  - Zh pontszámok átlaga

Tematika

- A rendszer- és irányításelmélet feladatai. Rendszerek leírása és modellezése
- Logikai változók, alapműveletek, kifejezések, függvények kanonikus alakjai és minimalizálása.
- Kombinációs hálózatok statikus viselkedése és tranziensei (hazárdok).
- Sorrendi hálózatok. Moore és Mealy automaták.
  - Szinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok dinamikai problémái (versenyhelyzetek).

Tematika

- A rendszer- és irányításelmélet feladatai. Rendszerek leírása és modellezése
- Logikai változók, alapműveletek, kifejezések, függvények kanonikus alakjai és minimalizálása.
- Kombinációs hálózatok statikus viselkedése és tranziensei (hazárdok).
- Sorrendi hálózatok. Moore és Mealy automaták.
  - Szinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok dinamikai problémái (versenyhelyzetek).

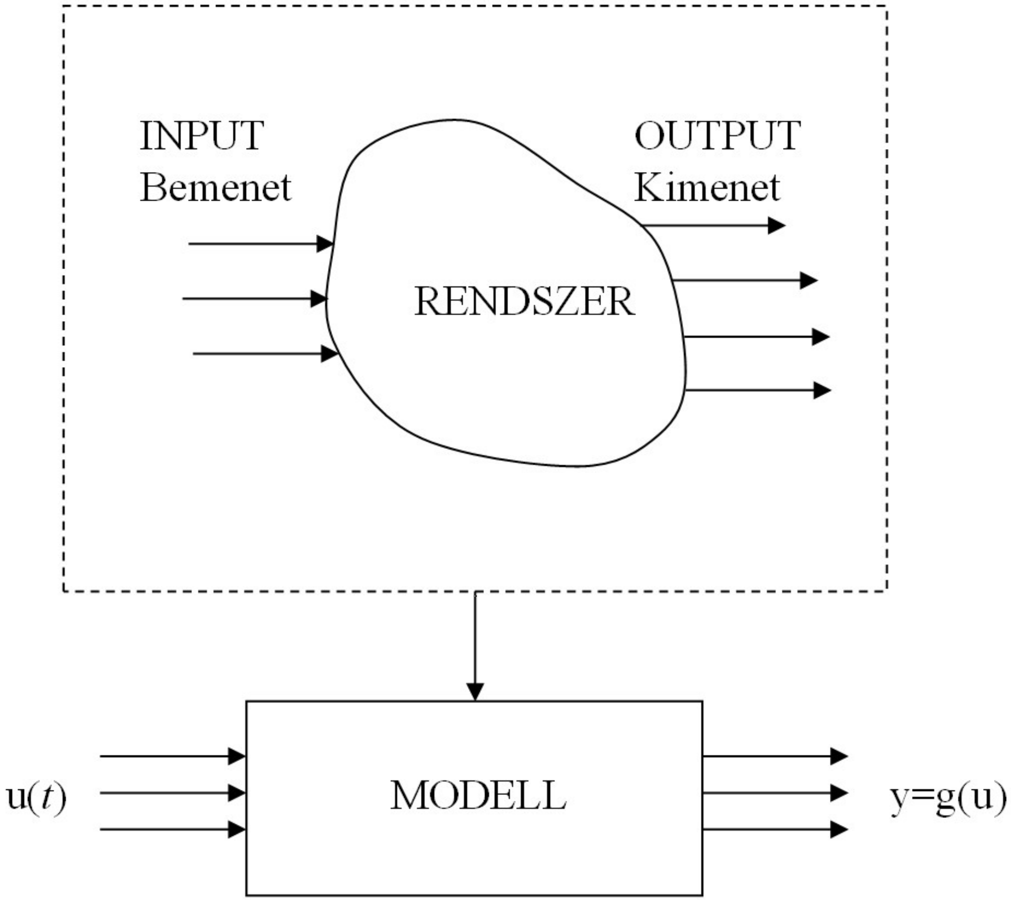
A rendszer fogalma

Egy lehetséges rendszerfogalom definíció az irodalomból:

A rendszer elemek olyan kombinációja, amely

- együttesen,
- az elemek együttműködése, illetve kölcsönhatása révén
- olyan funkció megvalósítására képes,
- amelyre az egyes elemek (vagy azok egyszerű összessége) nem képesek.

A rendszer fogalma

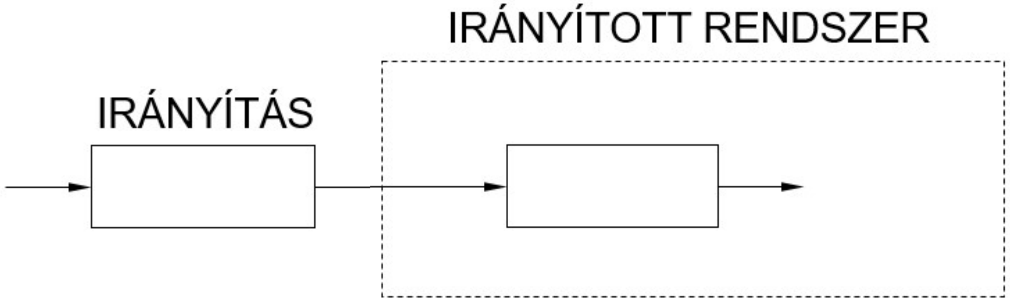


A rendszer- és irányításelmélet feladatai

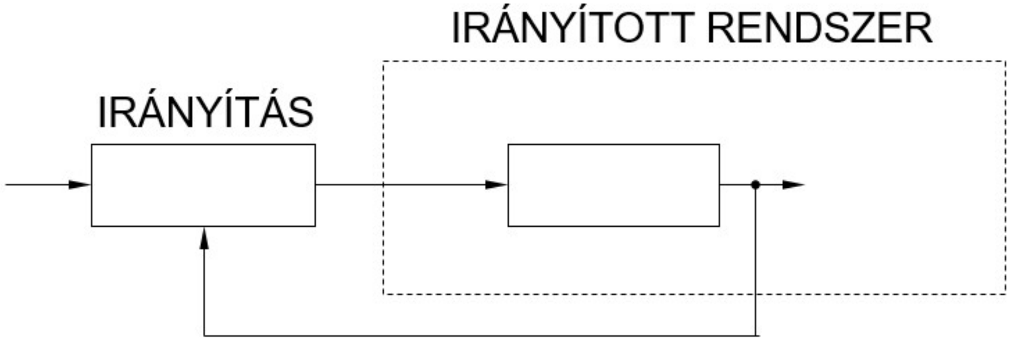
1. Modellezés és analízis
2. Tervezés és szintézis
3. Irányítás
    - Kívánt viselkedés
    - Teljesítmény-értékelés
    - Optimálás

Az irányítás feladata a rendszer kívánt viselkedésének eléréséhez szükséges „helyes bemenetek" kiválogatása.

A rendszer- és irányításelmélet feladatai



Nyílt hurkú irányítás



Zárt hurkú irányítás (szabályozás)

Az irányítás feladata a rendszer kívánt viselkedésének eléréséhez szükséges „helyes bemenetek" kiválogatása.

A rendszer fajtái

- Determinisztikus / Sztochasztikus
  van-e véletlenszerűség
- Statikus / dinamikus rendszerek
  kimenet függése a korábbi bemenettől
- Folytonos állapotú / Diszkrét állapotú / Hibrid
  állapot: t időpillanatban a rendszer viselkedésének leírása
- Idővezérelt / Eseményvezérelt
  mi váltja ki az állapotváltozást?
- Folytonos idejű / Diszkrét idejű
  mintavételezés
- Lineáris / Nemlineáris
  szuperpozíció
- Időfüggő / Időinvariáns-időfüggetlen (dinamikus) rendszerek
  bemenet/kimenet kapcsolata az időben
  a szabályok állandóak a rendszerben?

A rendszer fajtái

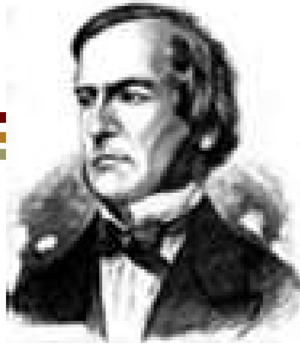
- **Determinisztikus** / Sztochasztikus
- **Statikus** / **dinamikus**
- Folytonos állapotú / **Diszkrét állapotú** / Hibrid
- **Idővezérelt** / **Eseményvezérelt**
- Folytonos idejű / **Diszkrét idejű**
- Lineáris / **Nemlineáris**
- Időfüggő / **Időinvariáns**

Tematika

- A rendszer- és irányításelmélet feladatai. Rendszerek leírása és modellezése
- Logikai változók, alapműveletek, kifejezések, függvények kanonikus alakjai és minimalizálása.
- Kombinációs hálózatok statikus viselkedése és tranziensei (hazárdok).
- Sorrendi hálózatok. Moore és Mealy automaták.
  - Szinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok dinamikai problémái (versenyhelyzetek).

Logikai hálózat / Boole-algebra

George Boole (1815-1864)



A Boole-algebrában három alapműveletet értelmezünk:

- NEGÁCIÓ (jelölése felülvonás, pl. $\bar{A}$; a hosszú felülvonással jelölt negáció zárójelet is helyettesít, azaz $\overline{AB} \neq \bar{A}\bar{B}$),
- logikai ÉS művelet (jelölése $\cdot$: $A \cdot B$),
- logikai VAGY művelet (jelölése +, pl. $A + B$).

Boole-algebra

- Logikai alapműveletek:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1; \qquad 0 + 0 = 0$$

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0; \quad \overline{\overline{0}} = 0; \quad \overline{\overline{1}} = 1$$

Boole-algebra

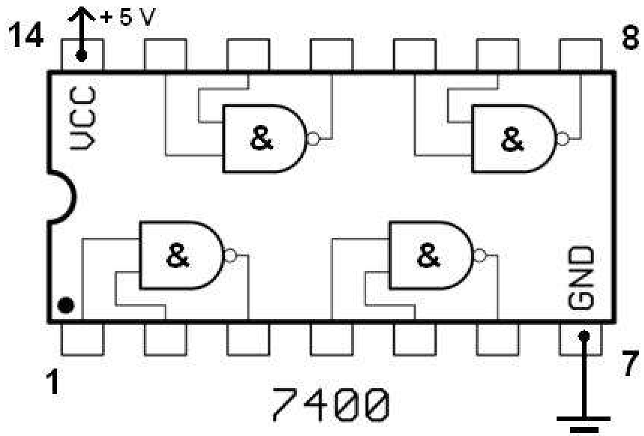
Logikai algebrai kifejezések:

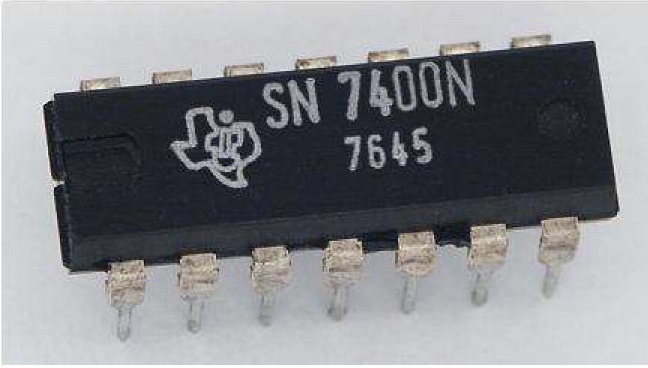
- kommutativitás, felcserélhetőség
- asszociativitás, csoportosíthatóság
- abszorbció, elnyelési tulajdonság
- disztributivitás, összekapcsolható

- De Morgan-azonosságok

Logikai függvények megvalósítása

- Kapuáramkörök
  - alapműveletekhez
    - AND, OR, NOT
  - összetett műveletek
    - NAND, NOR, XOR (antivalencia), ekvivalencia
- Jelfogók (relé)
- Számítógépek
- Pneumatikus hálózatok
- …





Kombinációs hálózatok

- **Determinisztikus** / Sztochasztikus
- **Statikus** / **Dinamikus**
- Folytonos állapotú / **Diszkrét állapotú** / Hibrid
- **Idővezérelt** / **Eseményvezérelt**
- Folytonos idejű / **Diszkrét idejű**
- Lineáris / **Nemlineáris**
- Időfüggő / **Időinvariáns**

Logikai függvények megadása

$$f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

- *A logikai függvény:*
  - *változói a rendszer bemenetei,*
  - *értékekei a rendszer kimenetei.*
- *A logikai függvény megadása igazságtáblázattal a **negáció**, **ÉS** és **VAGY** műveletek:*

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

A	B	AB	$A+B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Logikai függvények, igazságtáblázat

$$f\colon \{0,1\}^1 \to \{0,1\}$$

2db bemeneti kombináció $\rightarrow$ 4 db függvény

A				
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Logikai függvények, igazságtáblázat

$$f\colon \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$2^n \text{db bemeneti kombináció} \rightarrow 2^{2^n} \text{db függvény}$$

$$n = 2 \Rightarrow 2^2 = 4\text{db} \ \rightarrow 16 \text{ db függvény}$$

Logikai függvények, igazságtáblázat

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$A \cdot B$					$A \oplus B$	$A + B$		$A \odot B$						1

Logikai függvények, igazságtáblázat

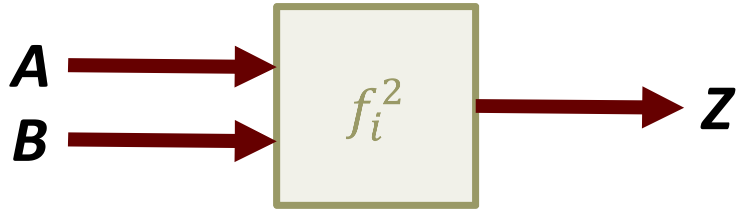
$$f_i^2(A,B) = \overline{f_{15-i}^2(A,B)}$$

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\cdot$		A		B	$\oplus$	$+$		$\odot$	$\bar{B}$		$\bar{A}$			1

Logikai függvények, algebrai alak

A	B	f_{11}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f_{11}^2(A,B)$$



$$Z = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

$$Z = f_{11}^2(A,B) = A + \bar{B}$$

Háromváltozós függvény algebrai minimalizálása

Példa:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Logikai függvények kanonikus alakjai

	$A(2^2)$	$B(2^1)$	$C(2^0)$	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

MINTERM (diszjunktív kanonikus alak)

A minterm alak általános jellemzői összefoglalva a következők:

- a minterm alak logikai szorzatok logikai összege,
- mindegyik szorzatban az összes független változó szerepel ponált vagy negált alakban,
- mindegyik szorzat olyan független-változó kombinációt képvisel, amelyhez tartozó függvényérték 1.

MAXTERM (konjunktív kanonikus alak)

A maxterm alak jellemzői a következők:

- a maxterm alak logikai összegek logikai szorzata,
- mindegyik összegben az összes független változó szerepel ponált vagy negált alakban,
- mindegyik összeg olyan független-változó kombinációt képvisel, amelyhez tartozó függvényérték 0.

Áttérés

- Negált függvény felírása, az *F* függvény értéke 0:

$\bar{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$	$\bar{F} = m_0^3 + m_1^3 + m_5^3 + m_7^3$

- Visszatérés a ponált függvényre:

$\bar{\bar{F}} = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC}$	$\bar{\bar{F}} = \overline{m_0^3 + m_1^3 + m_5^3 + m_7^3}$

- De Morgan azonosság alkalmazása:

$F = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{A\bar{B}C} \cdot \overline{ABC}$ $F = (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot$ $\cdot (\bar{A} + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$	$F = \overline{m_0^3} \cdot \overline{m_1^3} \cdot \overline{m_5^3} \cdot \overline{m_7^3}$ $F = M_7^3 \cdot M_6^3 \cdot M_2^3 \cdot M_0^3$ $\overline{m_i^n} = M_{2^n-1-i}^n$

Nem teljesen határozott logikai függvények

A	B	C	F_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	–
1	0	1	0
1	1	0	–
1	1	1	0

Nem teljesen határozott logikai függvények

A	B	C	F_{2a}	F_{2b}	F_{2c}	F_{2d}
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Nem teljesen határozott logikai függvények

$$F_{3a} = \bar{A}B$$
$$F_{3b} = \bar{A}B + B\bar{C}$$
$$F_{3c} = \bar{A}B + A\bar{B}\bar{C}$$
$$F_{3d} = \bar{A}B + A\bar{C}$$

A	B	C	F_{3a}	F_{3b}	F_{3c}	F_{3d}
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

MAXTERM-ből MINTERM

MIN Σ	$A(2^2)$	$B(2^1)$	$C(2^0)$	F_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Mintermek minimalizálása

	$A(2^2)$	$B(2^1)$	$C(2^0)$	F_1
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

$$F = m_2^3 + m_3^3 + m_4^3 + m_6^3$$

$$F = \bar{A}B(\bar{C} + C) + A\bar{C}(\bar{B} + B)$$

$$F = (m_2^3 + m_3^3) + (m_4^3 + m_6^3)$$

2^k számú szomszédos minterm összevonásakor k számú változó „esik ki”

Mintermek minimalizálása

- **minterm** – olyan speciális elemi logikai szorzat (ÉS) függvény, amely valamennyi változót tartalmazza ponált vagy negált formában
- **szomszédos mintermek** – csak egy helyértéken térnek el egymástól (egy változó az egyik mintermben ponált, a másikban negált értékkel szerepel, a többi változó mindkettőben azonos módon)
- egy „n” változós logikai függvény egy mintermjének „n” darab szomszédos mintermje lehet, hiszen „n” helyértéken különbözhetnek egy változóban

KARNAUGH-tábla igazságtáblából

A	B	C	F
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

		C	
A	B	0	1
0	0	m_0	m_1
0	1	m_2	m_3
1	1	m_6	m_7
1	0	m_4	m_5

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

C

m_0	m_1
m_2	m_3
m_6	m_7
m_4	m_5

B

A

B

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

A

C

KARNAUGH-tábla kitöltése

A	B	C	F_2	F_3
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	–
1	0	1	0	0
1	1	0	1	–
1	1	1	0	0

F_2 B

			1	1
A				1

C

F_3 B

			1	1
A	–			–

C

Négyváltozós KARNAUGH-tábla

AB\CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

C

	m_0	m_1	m_3	m_2
	m_4	m_5	m_7	m_6
A	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

B

D

A

	m_8	m_{12}	m_4	m_0
	m_{10}	m_{14}	m_6	m_2
D	m_{11}	m_{15}	m_7	m_3
	m_9	m_{13}	m_5	m_1

C

B

Logikai függvények egyszerűsítése

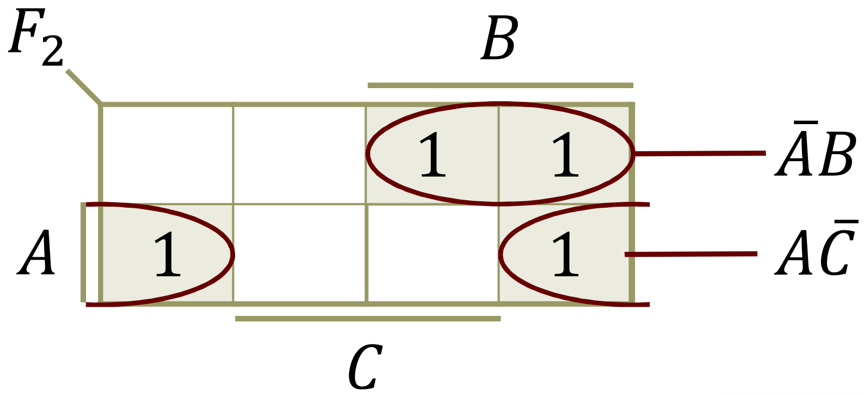
- a szomszédos mintermek megkeresése, párba válogatása (Karnaugh-táblán grafikusan ábrázolva)
- a lehetséges összevonások után a kiadódó termek közül szintén meg kell keresni a szomszédosakat
- az eljárást addig kell folytatni, amíg a logikai függvény olyan szorzatok összege nem lesz, amelyekből már egyetlen változó sem hagyható el anélkül, hogy a logikai függvény meg nem változna
- az ilyen logikai összegekben szereplő logikai szorzatok a ***prímimplikánsok***

Egyszerűsítés szomszédos mintermek összevonásával

	$A(2^2)$	$B(2^1)$	$C(2^0)$	F_1
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

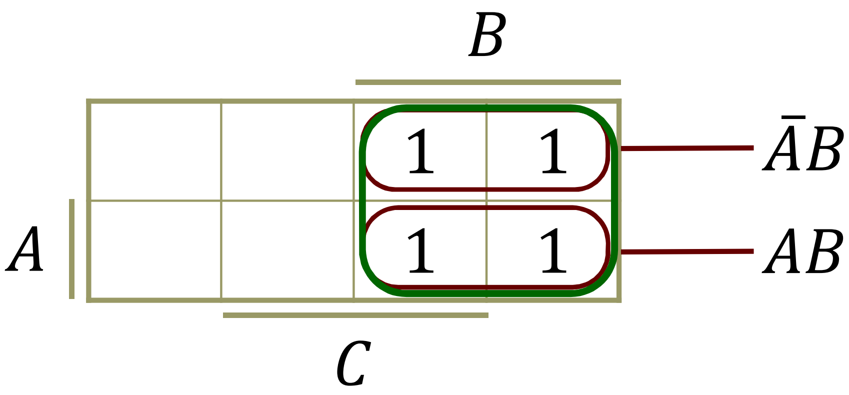
$$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$
$$F = m_2^3 + m_3^3 + m_4^3 + m_6^3$$

$$F = \bar{A}B(\bar{C} + C) + A\bar{C}(\bar{B} + B)$$
$$F = (m_2^3 + m_3^3) + (m_4^3 + m_6^3)$$



$$F = \bar{A}B + A\bar{C}$$

Példa az összevonásra



$$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + ABC + AB\bar{C} =$$

$$= \bar{A}B(\bar{C} + C) + AB(\bar{C} + C) =$$
$$= \bar{A}B + AB =$$

$$= B(\bar{A} + A) = B$$

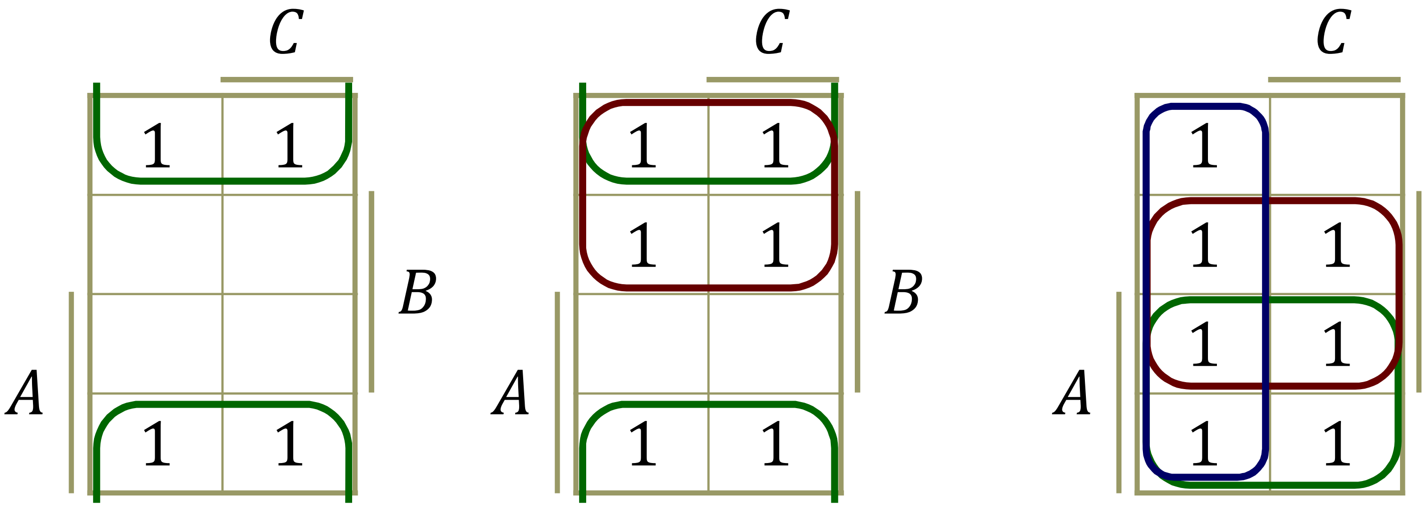
Logikai függvények egyszerűsítése

Az olyan logikai összegekben szereplő logikai szorzatokat ***prímimplikánsok***nak nevezzük, amelyekből már egyetlen változó sem hagyható el anélkül, hogy a logikai függvény meg nem változna

A Karnaugh-tábla segítségével történő függvényegyszerűsítés szabályai:

- Minden 1-est le kell fedni legalább egy huroknak, 0 nem kerülhet egyik hurokba sem
- Mindig annyi 1-est lehet összevonni, amelyek száma megfelel 2 valamelyik egész hatványának
- Az összevonások alakja mindig téglalap kell legyen, ugyanis csak azok a termek szomszédosak egymással, de az összevonás folytatódhat a tábla másik szélén.
- Minél több 1-est vonunk össze, annál több logikai változót hagyhatunk el a szorzatból (két 1-es összevonásakor 1 változót, négy 1-es összevonásakor 2 változót, nyolc 1-es összevonásakor 3 változót stb. hagyhatunk el.).
- Egyedülálló 1-es esetén egyszerűsítésre nincs mód, ekkor a teljes minterm felírásra kerül (egyes hurok) – egyetlen változót sem hagyhatunk el.
- Egy-egy Karnaugh-táblában szereplő 1-es akár több prímimplikánsban is szerepelhet, azaz a hurkok egymásba nyúlhatnak.
- Úgy kell minden 1-est lefedni, hogy ezt a lehető legkevesebb számú hurokkal tegyük, ezért a lehető legnagyobb hurkokat kell keresni.

Példa összevonásra

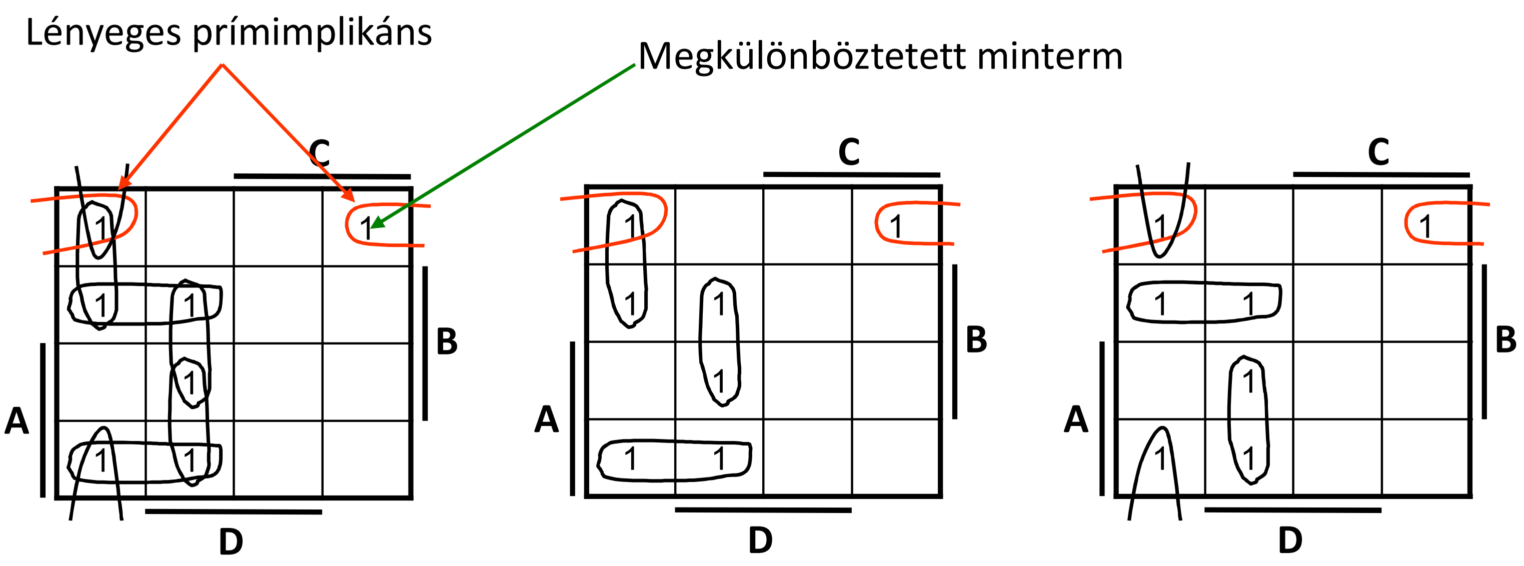


További fogalmak

- A Karnaugh táblán azoknak az 1-et tartalmazó celláknak, amelyek az összevonás során csak egy hurokban szerepelnek, olyan mintermek felelnek meg, amelyeket csak egy prímimplikáns tud lefedni. Ezek a mintermek a ***megkülönbeztetett mintermek***.

- A ***lényeges prímimplikáns*** olyan prímimplikáns, amely legalább egy megkülönböztetett mintermet helyettesít.

Lefedés prímimplikánsokkal



Az összes prímimplikáns

Egyenértékű összevonások

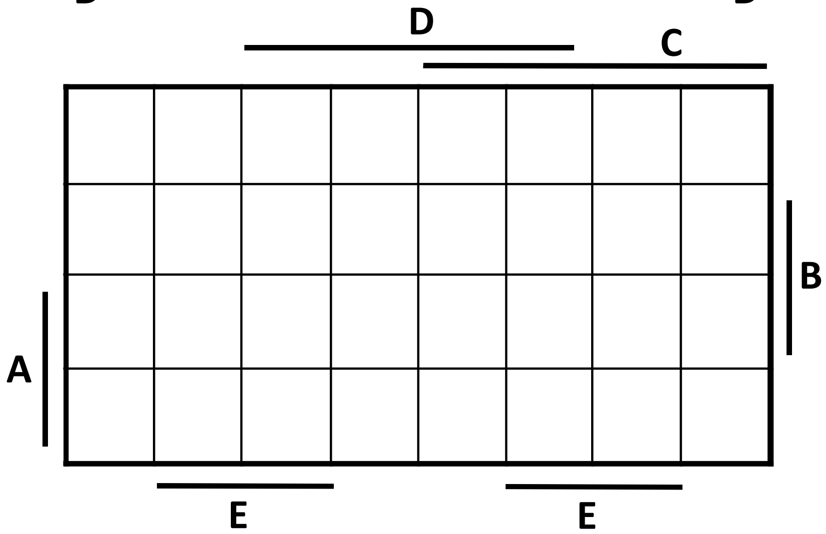
Ötváltozós függvény ábrázolása

E=0

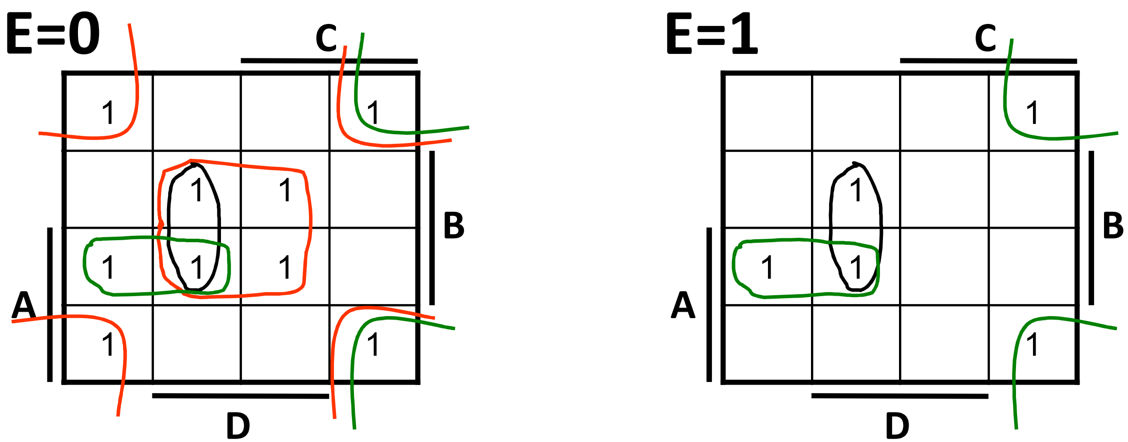
1			1
	1	1	
1	1	1	
1			1

E=1

			1
	1		
1	1		
			1



Ötváltozós függvény ábrázolása



$$F = BD\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E} + AB\overline{C} + \overline{B}C\overline{D} + B\overline{C}D$$

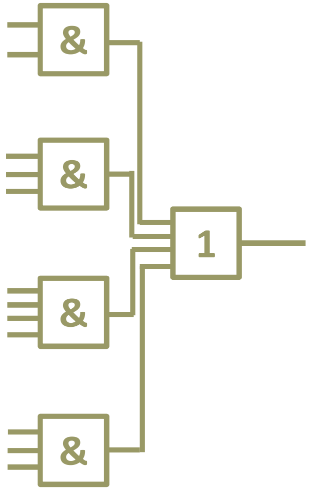
Karnaugh tábla összefoglalás

- logikai függvények egyszerűsítése
  - minterm és maxterm alakból
- inverz peremezés
- mintermekkel és implikánsokkal kapcsolatos fogalmak
- lefedés prímimplikánsokkal
- ötváltozós függvény Karnaugh táblája

Kétszintű és többszintű megvalósítás

Karnaugh-tábla → □·□+□·□·□+□·□·□·□+□·□·□

Kétszintű hálózat



További egyszerűsítés:

pl. kiemelés → □·(□+·□·□)+□·□·(□·□+□)

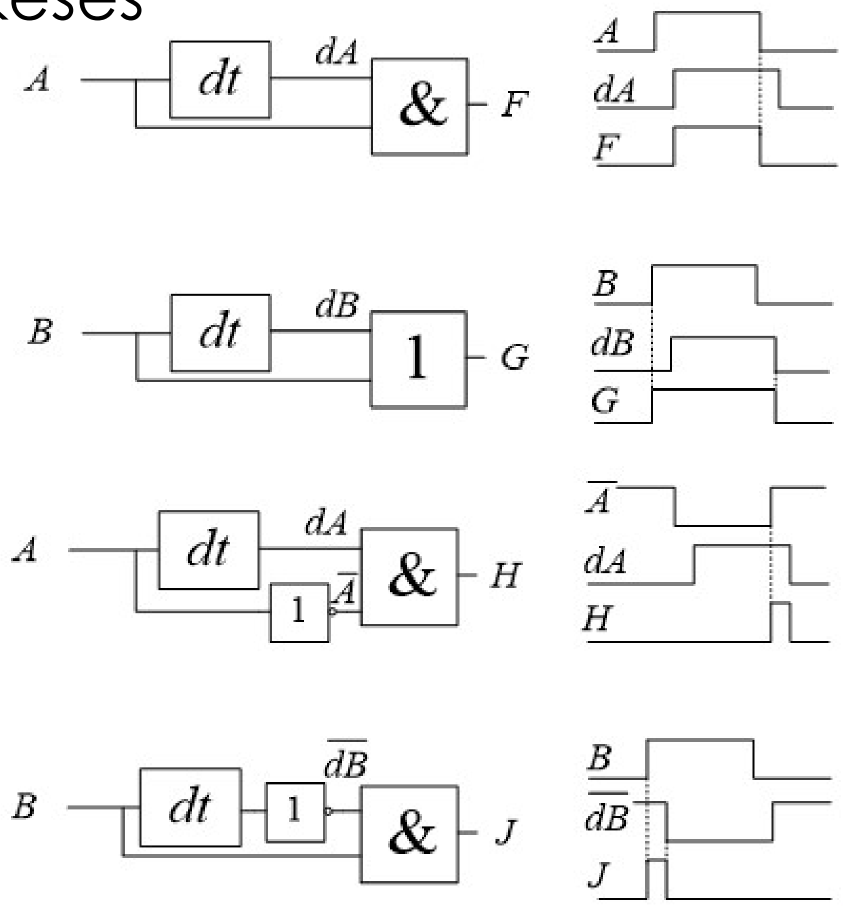
Többszintű hálózat

Tematika

- A rendszer- és irányításelmélet feladatai. Rendszerek leírása és modellezése
- Logikai változók, alapműveletek, kifejezések, függvények kanonikus alakjai és minimalizálása.
- Kombinációs hálózatok statikus viselkedése és tranziensei (hazárdok).
- Sorrendi hálózatok. Moore és Mealy automaták.
  - Szinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok tervezése.
  - Aszinkron sorrendi hálózatok dinamikai problémái (versenyhelyzetek).

Hazárdjelenségek kombinációs hálózatokban

- **véges jelterjedési sebesség** → időkésés
  - kapuk bemenete és kimenete között
    - **megszólalási idő** (propagation delay)
  - két kapu között
- **Hazárdok:** a kimeneti kombinációk
  - a tervezettől eltérnek
  - véletlenszerűen fellépnek
  - átmeneti ideig tartanak
- **ki** kell **küszöbölni**
  - a fellépésüket,
  - ha nem lehet, akkor a hatásukat

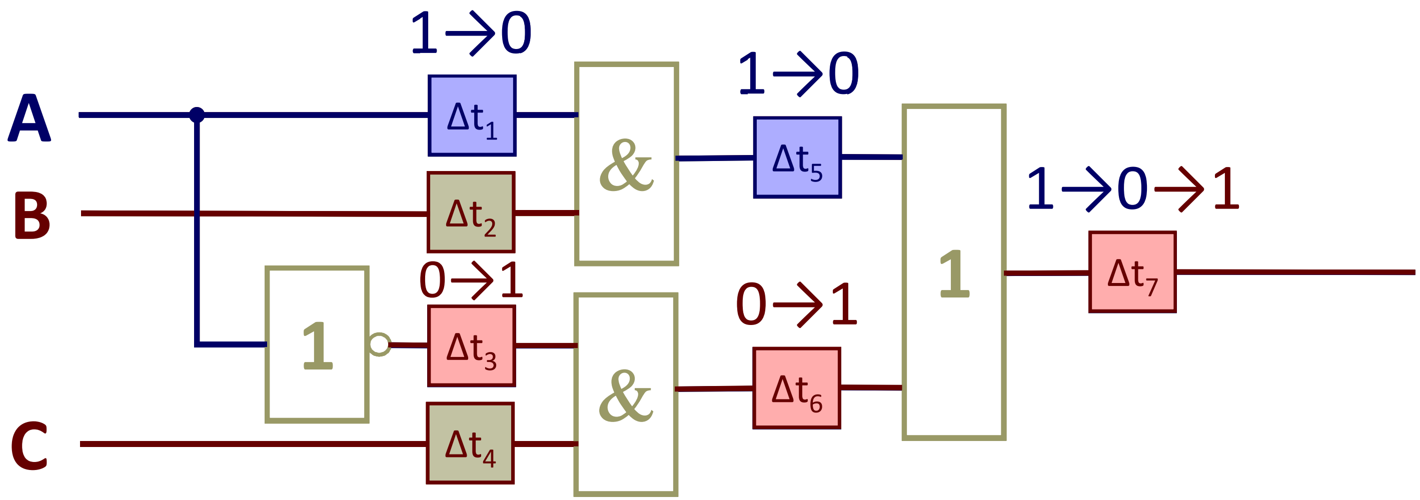


Jelterjedés

$$F = AB + \bar{A}C$$

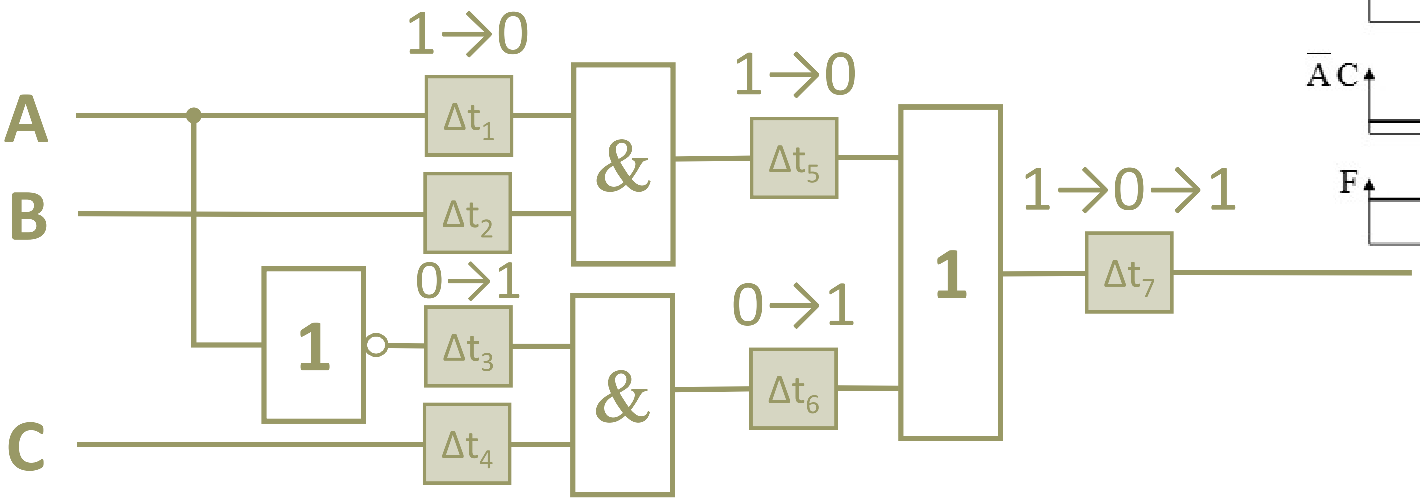
$$ABC = 111$$

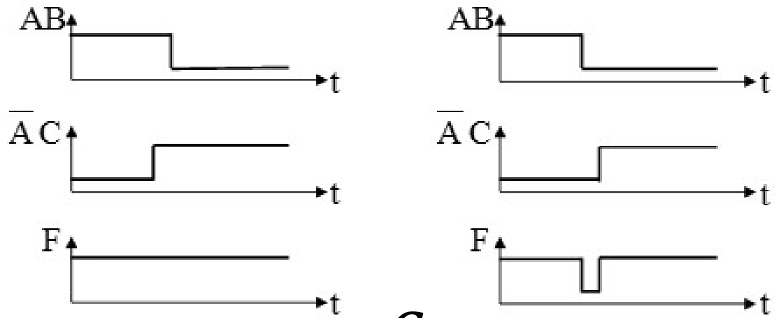
$$ABC = 011$$

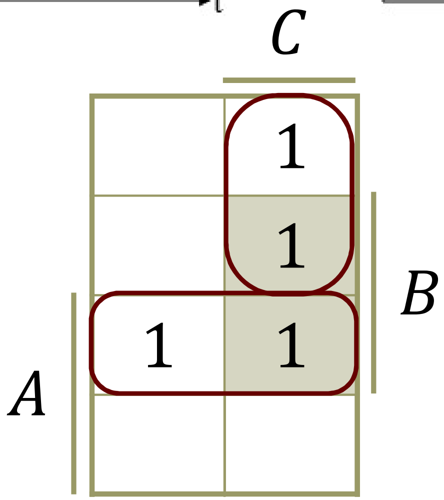


Statikus hazárd

$$F = AB + \bar{A}C \gg ABC = 111 \rightarrow ABC = 011$$



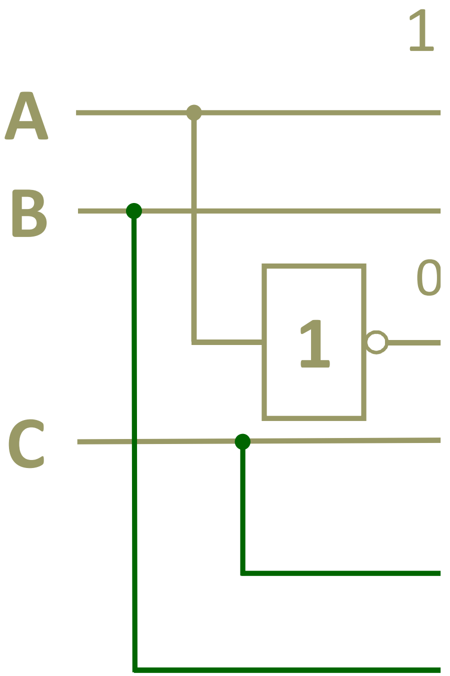


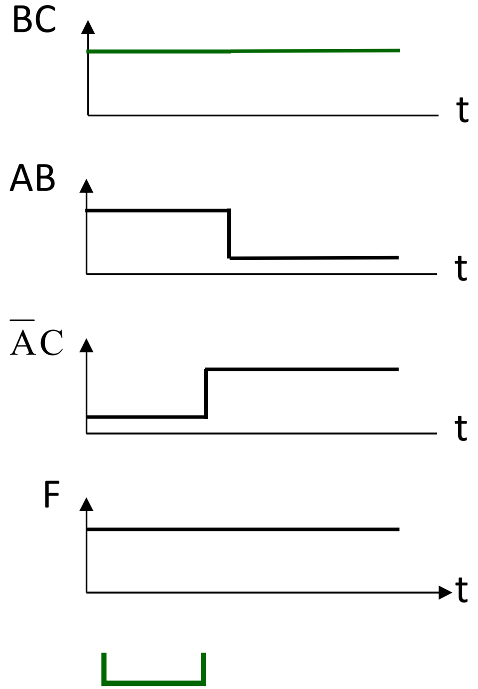


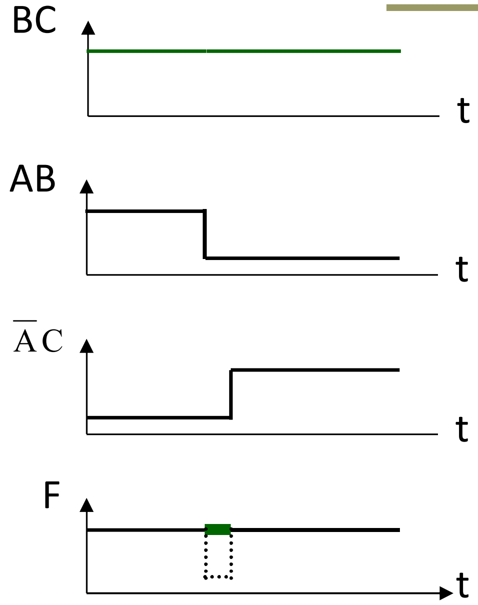
Statikus hazárd kiküszöbölése

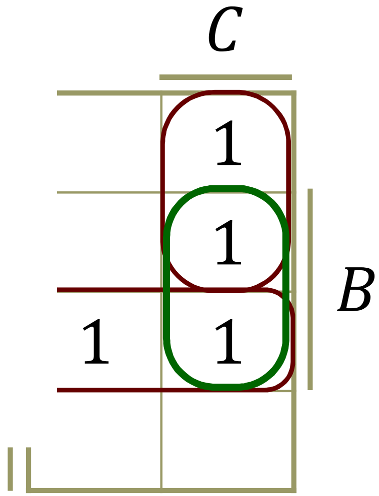
$$F = AB + \bar{A}C + BC$$

Kétszintű hálózat

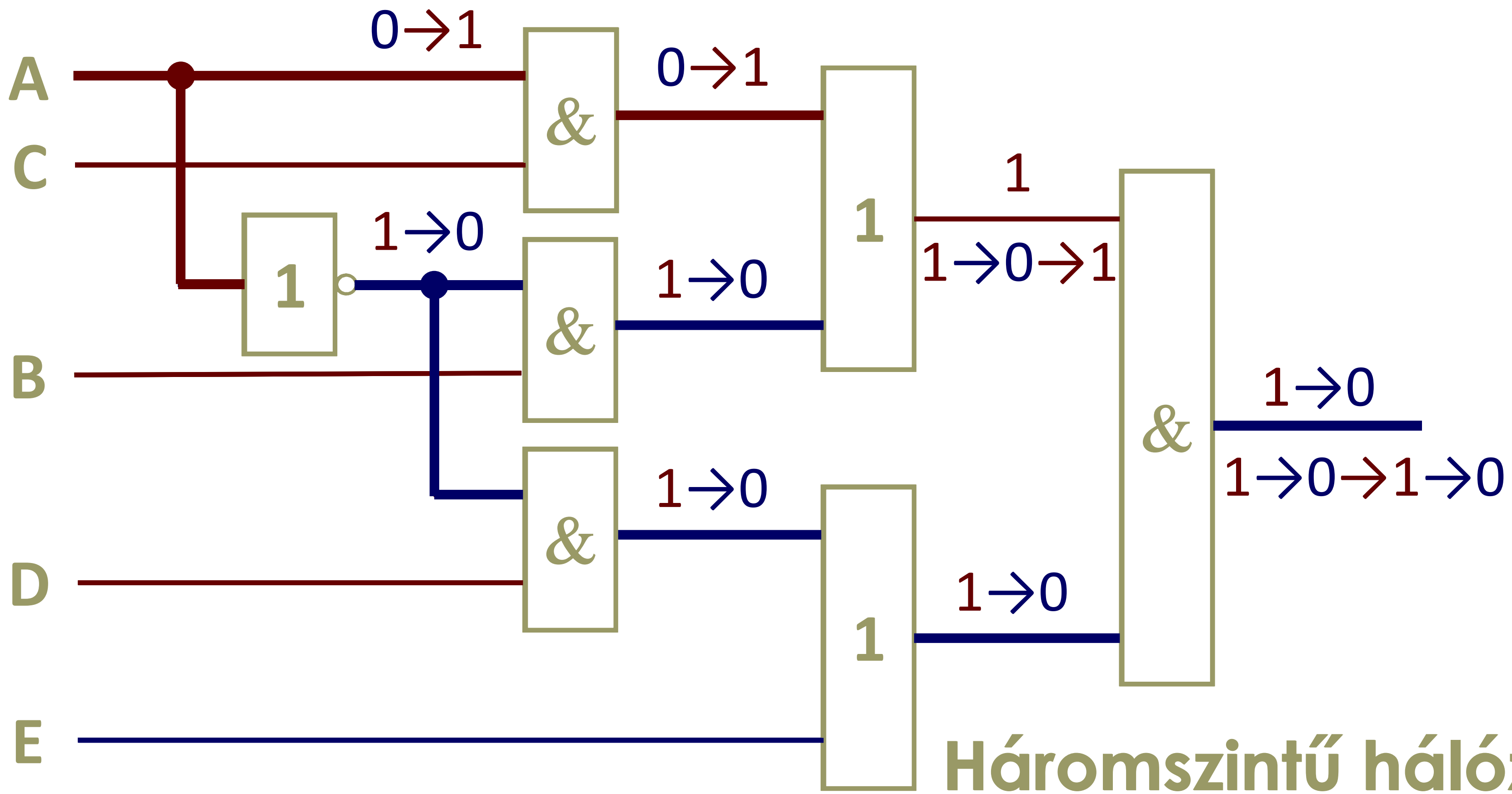






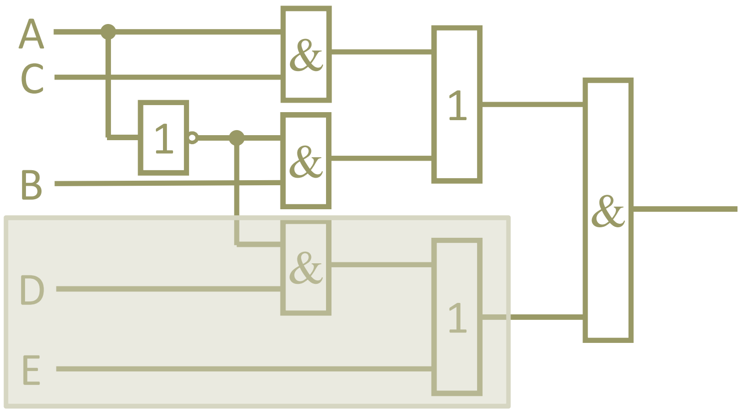


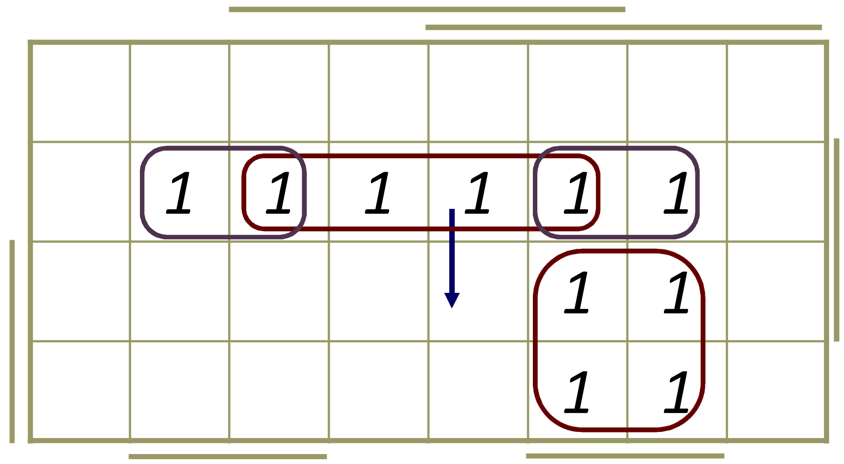
Dinamikus hazárd

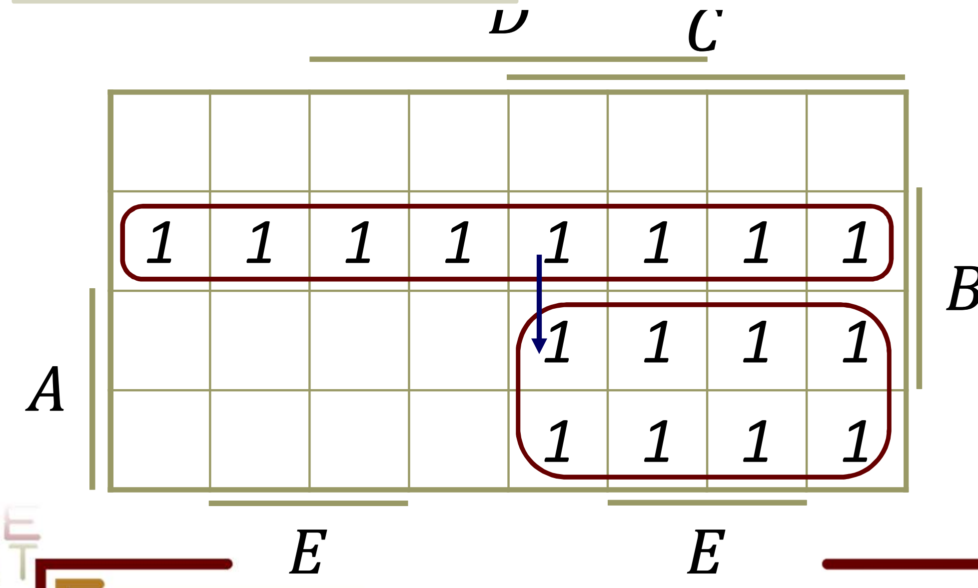


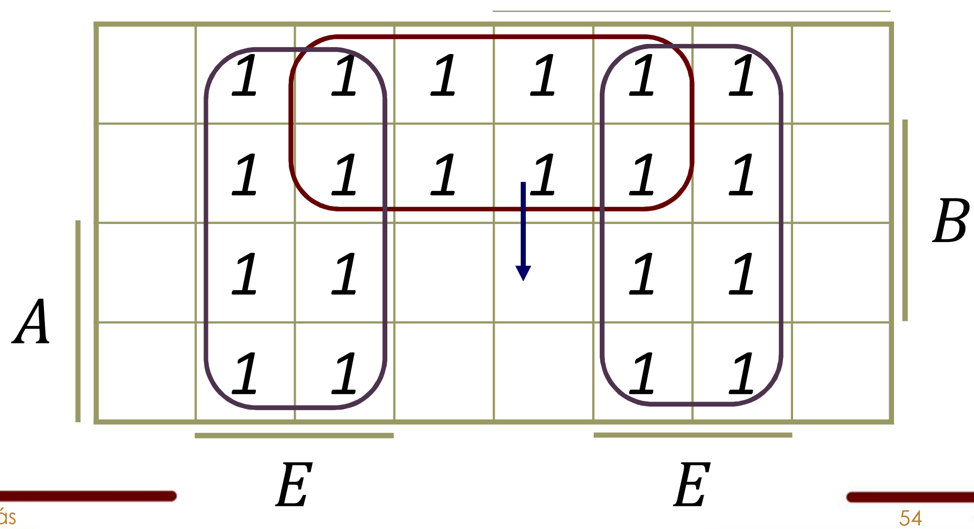
Háromszintű hálózat

Dinamikus hazárd









Dinamikus hazárd

- **Kettőnél többszintű hálózatok** esetén a jelterjedési idő további rendellenes működést is okozhat
- olyan bemeneti jel változások esetén, amelynek során csak **egyetlen bemenet változik**, és
- a két bemeneti kombinációhoz tartozó **függvényértékek különbözőek**, akkor a kimeneten előfordulhat 1→0→1→0, vagy 0→1→0→1 változás.

A dinamikus hazárd kivédése:

- az egyes szinteken történő statikus hazárdmentesítéssel,
- vagy a hálózat kétszintű megvalósításával lehetséges.

Funkcionális hazárd

- Ha egy hálózat bemenetén egyszerre több jel változik, akkor ezt a változást a hálózat szinte biztosan nem egyidejűnek érzékeli. Ennek oka, hogy az egyes bemenetekre kapcsolódó kapuk késleltetése nem feltétlenül egyforma, de maguk a jelváltozások sem történnek egyidőben. Az ilyen bemeneti jel változás okozta helytelen működést funkcionális hazárdnak nevezzük. A funkcionális hazárd elleni védekezés kizárólag a bemeneti jelek megfelelő kapcsolásával oldható meg.

Összefoglalás

- Statikus hazárd
- Dinamikus hazárd
- Funkcionális hazárd