ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK I.
3A. VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLETI BEVEZETŐ

MŰEGYETEM 1782

Dr. Soumelidis Alexandros

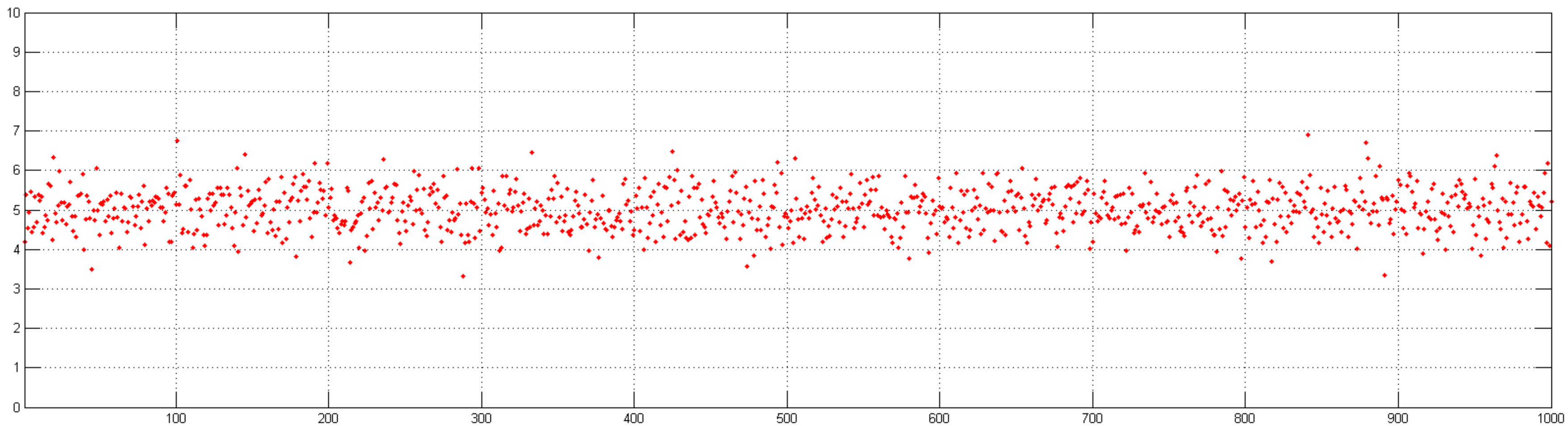
2020.10.01.

BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

A mérés eredménye

A mérés eredménye: ξ – valószínűségi változó.

Mérési sorozat: ξ_n - N mérés



Relatív gyakoriság:

N mérés eredményéből mekkora hányad esik egy meghatározott tartományba?

$$\ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots$$

felosztás

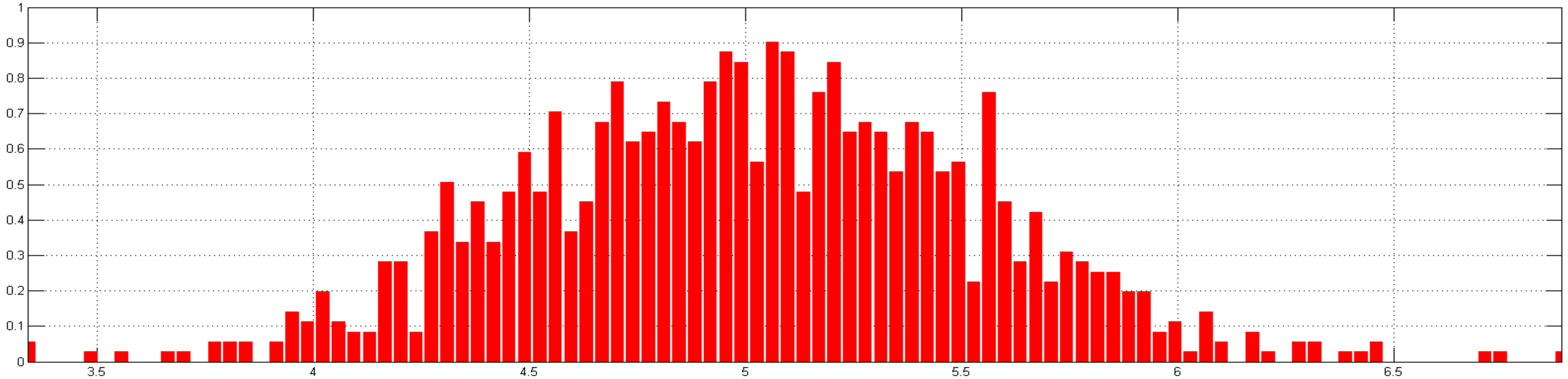
$$I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

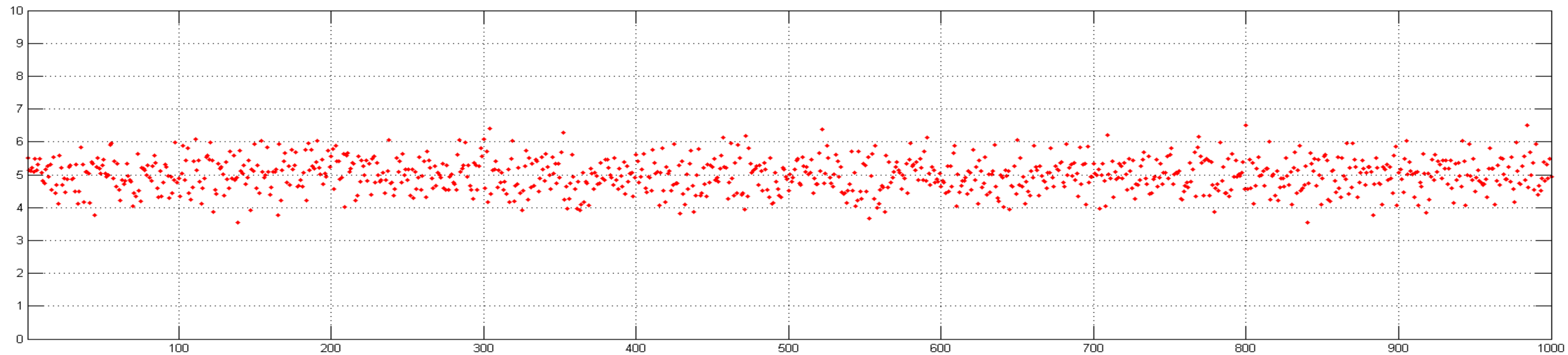
$$\xi \in I_i \quad F_i = \frac{n_i}{N}$$

A relatív gyakoriság

Hisztogram: $f_i = \dfrac{n_i}{N h_i}$ $\quad h_i = x_i - x_{i-1}$

Példa: 1000 mérési pont, 100 (+2) intervallum

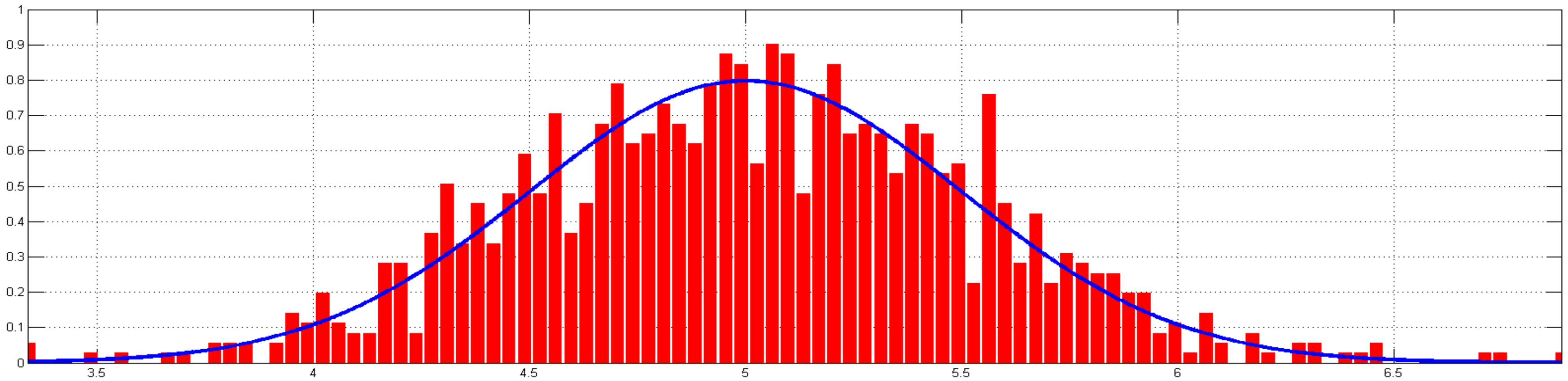




A relatív gyakoriság

Hisztogram: $f_i = \frac{n_i}{N h_i}$ $h_i = x_i - x_{i-1}$

Példa: 1000 mérési pont, 100 (+2) intervallum



A hisztogram a **valószínűségsűrűség** függvény egy becslését adja

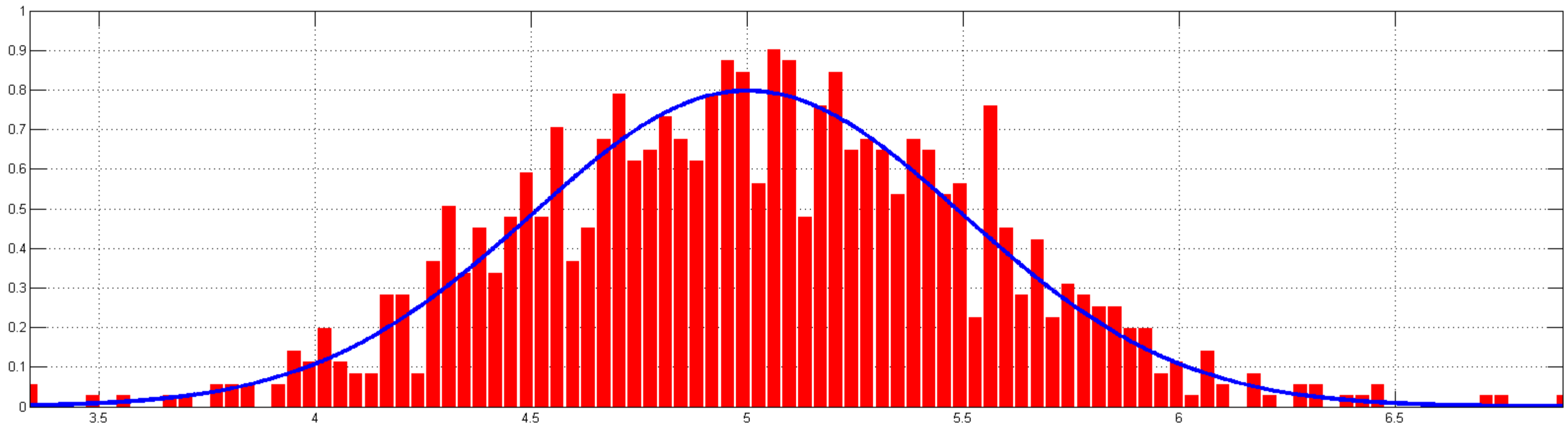
Normális (Gauss) eloszlás:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ „haranggörbe”

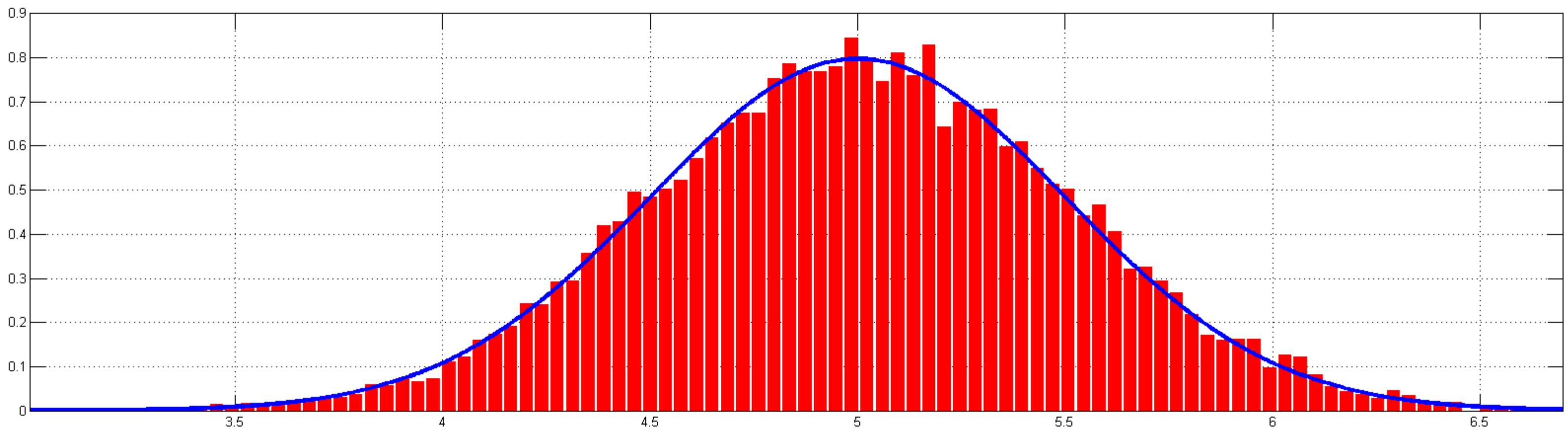
A relatív gyakoriság

A relatív gyakoriság *N* növekedésével stabilizálódik:

N=1000



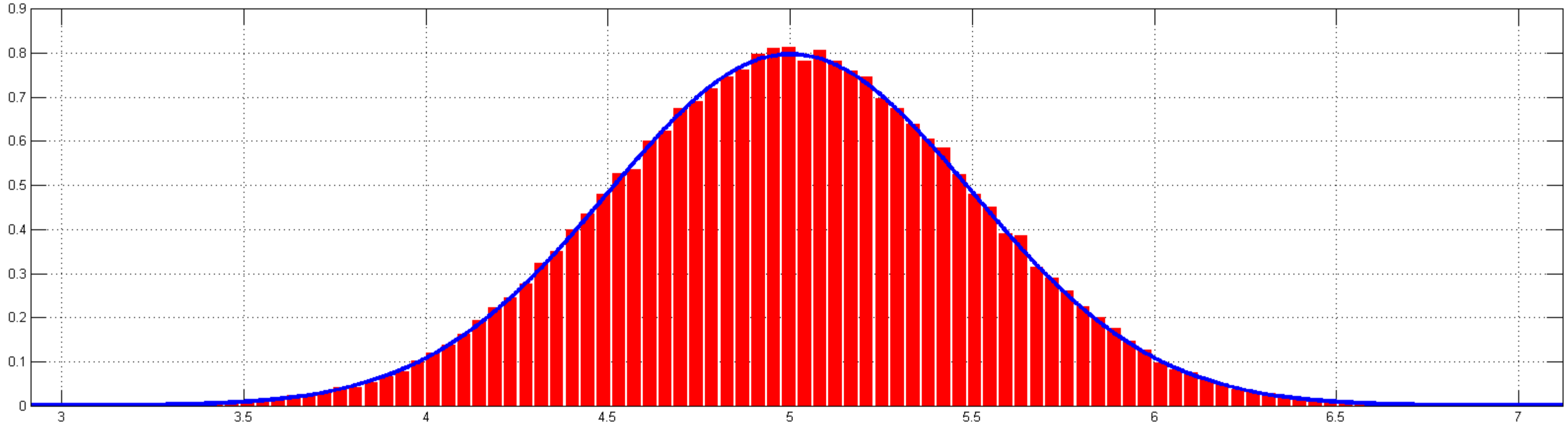
N=10000



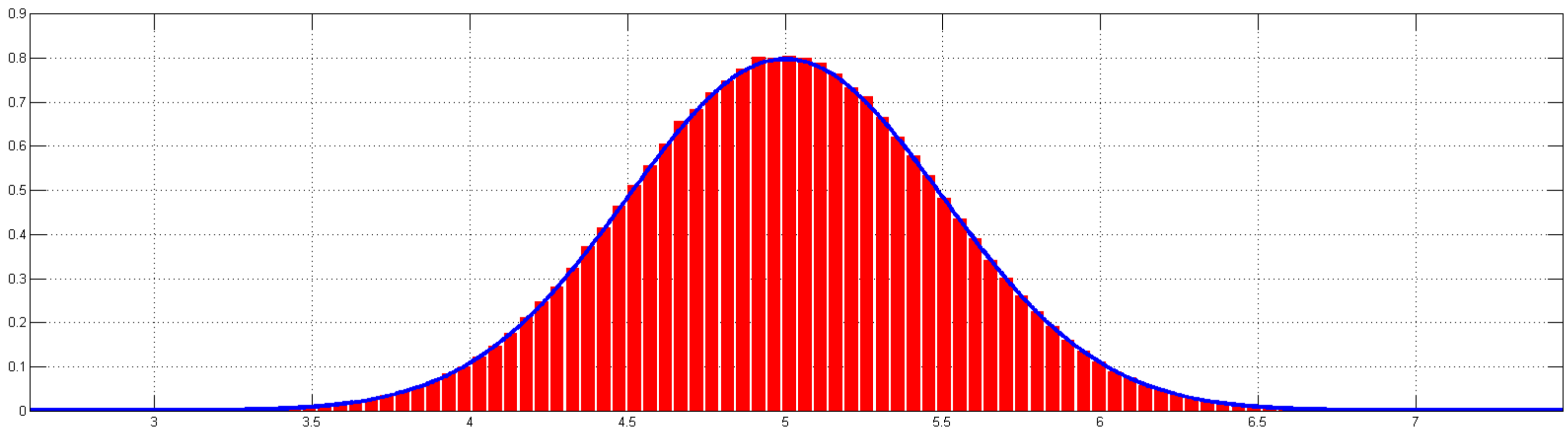
A relatív gyakoriság

A relatív gyakoriság *N* növekedésével stabilizálódik:

N=100000



N=1000000



A valószínűség

A relatív gyakoriság *N* növekedésével meghatározott számhoz tart:

valószínűség

A valószínűség relatív gyakoriságokkal való definiálása a „naív” valószínűségelmélet körébe tartozik (Pascal, Fermat, Bernoulli, Moivre, Laplace).

A valószínűség axiomatikus megalapozása:

Andrei Kolmogorov.

Андре́й Никола́евич Колмого́ров (1903-1987)

Valószínűségelmélet (1933)

A relatív gyakoriságok konvergenciája a valószínűségelméletben bizonyítandó **tétel**ek formájában jelenik meg.

(összefoglaló néven: *nagy számok törvénye*)

Valószínűségelmélet

- Valószínűségi mező: *Ω* alaphalmaz és ennek részhalmazain definiált számok (mérték).
- Véletlen kimenetelű kísérleteket végzünk, illetve véletlen események következnek be.
- A kísérletek kimenetelei, az események *Ω* alaphalmaz részhalmazai, $A \subset \Omega$.
- Valószínűségek: az eseményekhez rendelhető számok, *P(A), amelyekre*

axiómák

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$ (a biztos esemény valószínűsége 1)
- $\{A_i\}$ $(i = 1,2,3, \ldots)$, $A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ (egymást kizáró események esetén) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Valószínűségelmélet

Tételek:

- $P(\emptyset) = 0$ (a lehetetlen esemény valószínűsége 0)
- $\{A_i\}$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, $A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$,

  azaz teljes eseményrendszer esetén,

  $$(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (a kiegészítő esemény valószínűsége)
- Ha $A \subset B$, azaz A maga után vonja B-t,

  $P(A) \leq P(B)$ és $P(B - A) = P(B) - \mathrm{P}(A)$

- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

… stb.

Feltételes valószínűség

A és B két egymástól függetlenül elvégzett kísérlet eredménye, $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B)$$

a valószínűsége *A* eseménynek, olyan esetekben, amikor *B* bekövetkezett:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$P(AB)$ a két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége.

$P(A|B)$ feltételes valószínűség A esemény B esemény bekövetkezésére vonatkoztatott valószínűsége.

Feltételes valószínűség

A szorzási szabály: $P(AB) = P(A|\mathrm{B})P(B)$

A teljes valószínűség tétele és Bayes tétele:

$\{B_i\}$ $(i = 1,2, \dots, n)$, $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$, $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$,

azaz teljes eseményrendszer esetén, továbbá ha teljesül $P(B_i) \neq 0$, akkor A tetszőleges eseményre

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$ a teljes valószínűség tétele

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$ Bayes tétele

Függetlenség

Köznapi értelemben két esemény független, ha egymásra nincsenek befolyással. A valószínűségi értelmezés:

$$P(A|B) = P(A)$$

amely a definíció szerint azonos a következővel:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

azaz A és B események *valószínűségi értelemben* vagy *sztochasztikusan* függetlenek, ha

együttes valószínűségük megegyezik **valószínűségük szorzatával.**

Valószínűségi változók

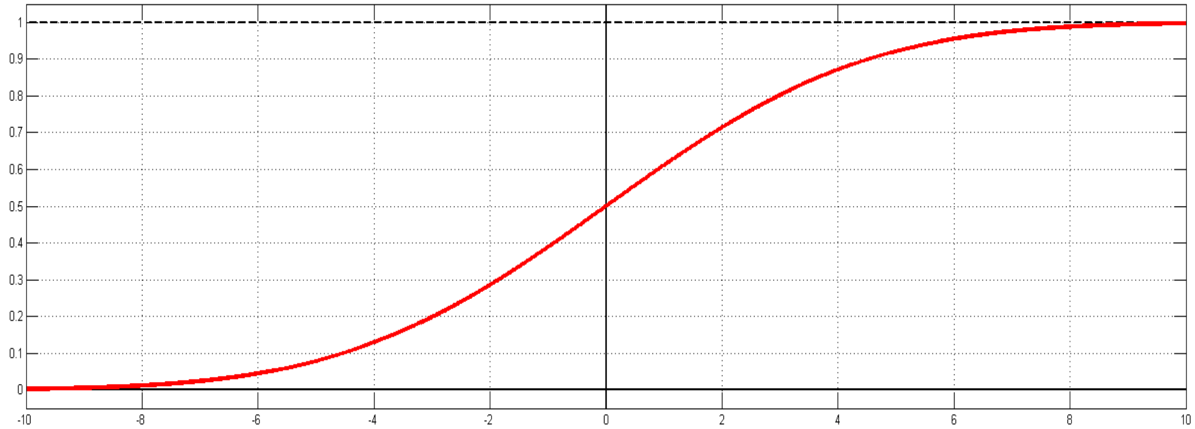
Az alaphalmaz a *valós számegyenes* – elemi események a *valós számok*. Események – intervallumok.

ξ valószínűségi változó **valószínűségeloszlás** függvénye:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

A valószínűségeloszlás függvény tulajdonságai:

- $F(x_1) \leq F(x_2)$, ha $x_1 \leq x_2$, azaz monoton növekedő
- $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$



Valószínűségi változók

ξ valószínűségi változó **folytonos**, ha létezik $f(x) \geq 0$ függvény, hogy

$$F(b) - F(a) = P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ *x* valószínűségi változó **valószínűségsűrűség** függvénye.

Tulajdonságai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

$f(x) = F'(x)$, ha *F* folytonos és differenciálható függvény

Együttes eloszlások

(ξ,η) valószínűségi változók **együttes valószínűségeloszlás** függvénye:

$$H(x,y) = P(\xi < x, y < \eta)$$

(ξ,η) valószínűségi változók **együttes valószínűségsűrűség** függvénye *h(x,y)*, amelyre

$$H(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} h(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

azaz *H* folytonosan differenciálható eloszlásfüggvény esetén

$$h(x,y) = \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Peremeloszlások

(ξ,η) valószínűségi változók peremeloszlásai az **együttes valószínűségeloszlás** alapján:

$$F(x) = P(\xi < x, \eta < \infty) = H(x, \infty)$$

$$G(y) = P(\xi < \infty, \eta < y) = H(\infty, y)$$

*A*z **együttes valószínűségsűrűség** függvényből

az eloszlásfüggvények:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

a sűrűségfüggvények:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, \eta) d\eta$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, y) d\xi$$

Feltételes eloszlások

ξ valószínűségi változó A eseményre vonatkoztatott ***feltételes valószínűségeloszlás*** *függvénye*:

$$F(x|A) = P(\xi < x|A)$$

feltételes valószínűségsűrűség *függvénye*:

$$f(x|A) = F'(x|A)$$

feltéve, hogy F folytonosan differenciálható.

Különösen fontos eset: ξ valószínűségi változó $\eta = y$ eseményre vonatkoztatott feltételes eloszlása, $F(x|y)$:

$$F(x|y) = \lim_{\Delta y \to 0} P(\xi < x|y \leq \eta \leq y + \Delta y) \qquad F(x|y) = \frac{\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}}{g(y)}$$

Valószínűségi változók függetlensége

(ξ,η) valószínűségi változókat ***függetlennek*** nevezzük, ha tetszőleges *a,b,c,d* konstansok mellett

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = P(a \leq x \leq b)P(c \leq y \leq d)$$

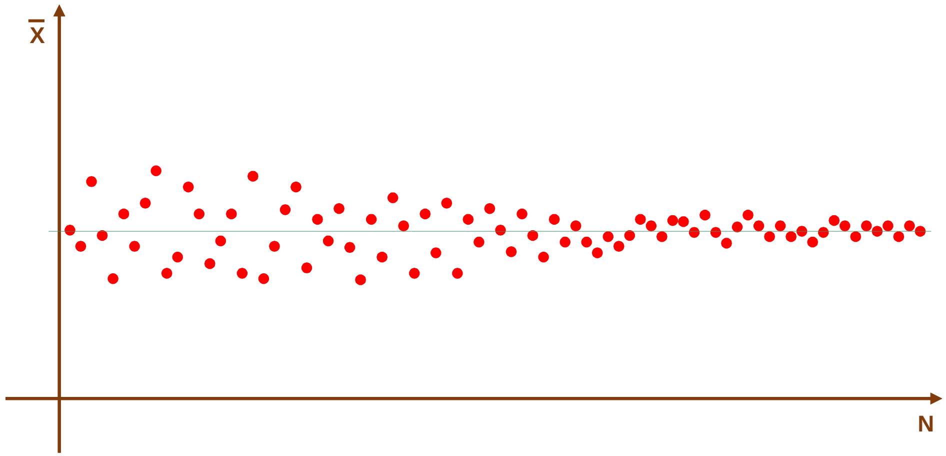
Bizonyítható, hogy ez ekvivalens a következőkkel:

$$H(x,y) = F(x)\,G(y) \qquad h(x,y) = f(x)\,g(y)$$

Várható érték

Középérték: $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

nagy számú esetre –
stabilizálódik egy érték irányában



$$\lim_{N\to\infty} \bar{x} = E[x]$$

$E[.]$ valószínűségi változó ***várható értéke***

A várható érték származtatása a valószínűségsűrűség függvényből:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$ 1. momentum

Várható érték

Összeg várható értéke: ha létezik ξ és η várható értéke,

$$E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$$

Szorzat várható értéke: ha ξ és η független valószínűségi változók, továbbá létezik várható értékük,

$$E[\xi\eta] = E[\xi]E[\eta]$$

Feltételes várható érték:

$$E[\xi|A] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|A)dx \qquad E[\xi|\eta = y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$$

Momentumok

Momentumok:

1. momentum	$\mu_x = E[x]$	középérték
2. momentum	$\psi_x^2 = E[x^2]$	négyzetes közép
k. momentum	$\alpha_x^k = E[x^k]$	

Centrális momentumok:

2. centrális momentum	$\sigma_x^2 = E[(x - E[x])^2]$	szórásnégyzet
k. centrális momentum	$\gamma_x^k = E[(x - E[x])^k]$	

Együttes momentumok:

Kovariancia

$$c_{xy} = E[(x - E[x])(y - E[y])]$$

Korrelációs együttható

$$c_{xy} = \frac{E[(x - E[x])(y - E[y])]}{\sqrt{E[(x - E[x])^2]E[(y - E[y])^2]}}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros

email: soumelidis@sztaki.hu

BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG