ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK I.
5. A JELFELDOLGOZÁS ALAPJAI: JELEK

MŰEGYETEM 1782

Dr. Soumelidis Alexandros

2020.10.15.

BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

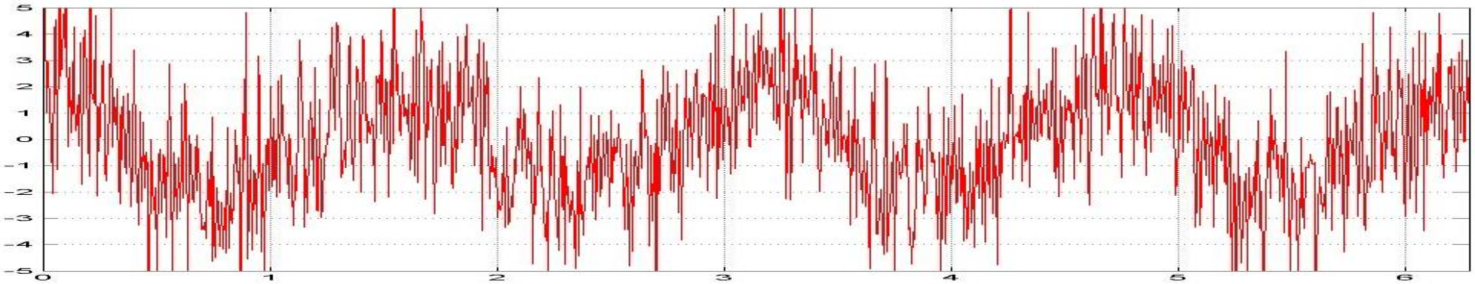
Mérések és jelek

x mért jellemző: időfüggvény - jel

Jel: valamely fizikai jellemzőhöz tartozó, a konkrét fizikai megjelenésétől elvonatkoztatott időfüggvény

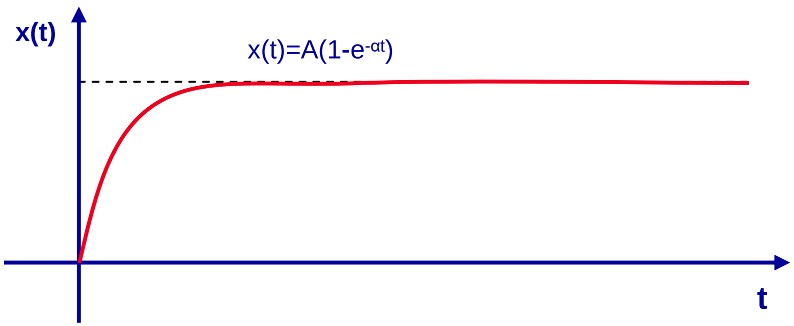
$x = f(\mathrm{t})$ - csak időbeli lefolyása érdekes

x(t) általában folytonos idejű jel – t (idő) valós paraméter függvénye



A jelek osztályozása

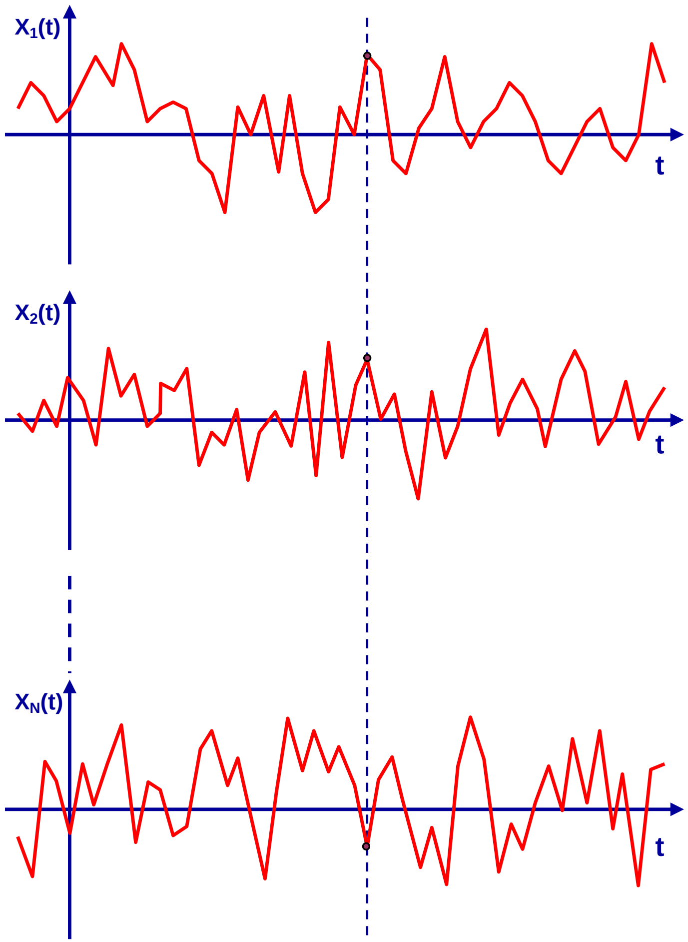
- **Determinisztikus jelek**



meghatározott időfüggvénnyel leírhatók

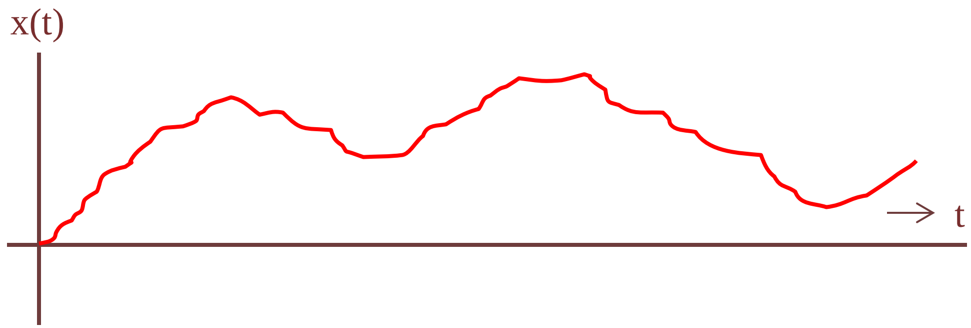
- **Sztochasztikus jelek**

különböző realizációjuk különböző időfüggvényeket eredményez

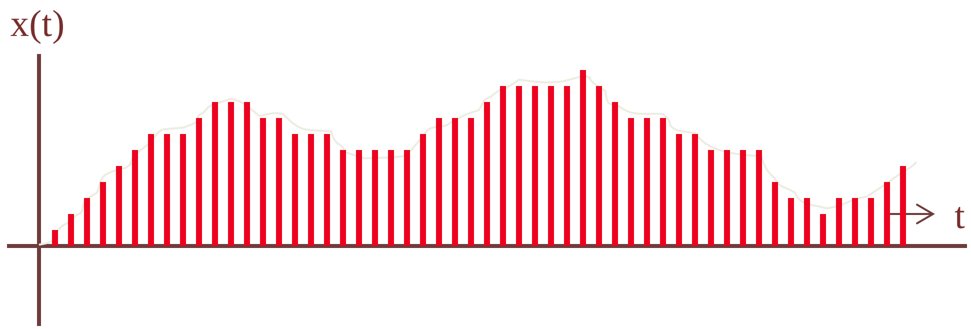


A jelek osztályozása

- Analóg jelek (folytonos idejű)



- Digitális jelek (diszkrét idejű)



Mintavételezés + kvantálás — AD konverzió

Determinisztikus jelek

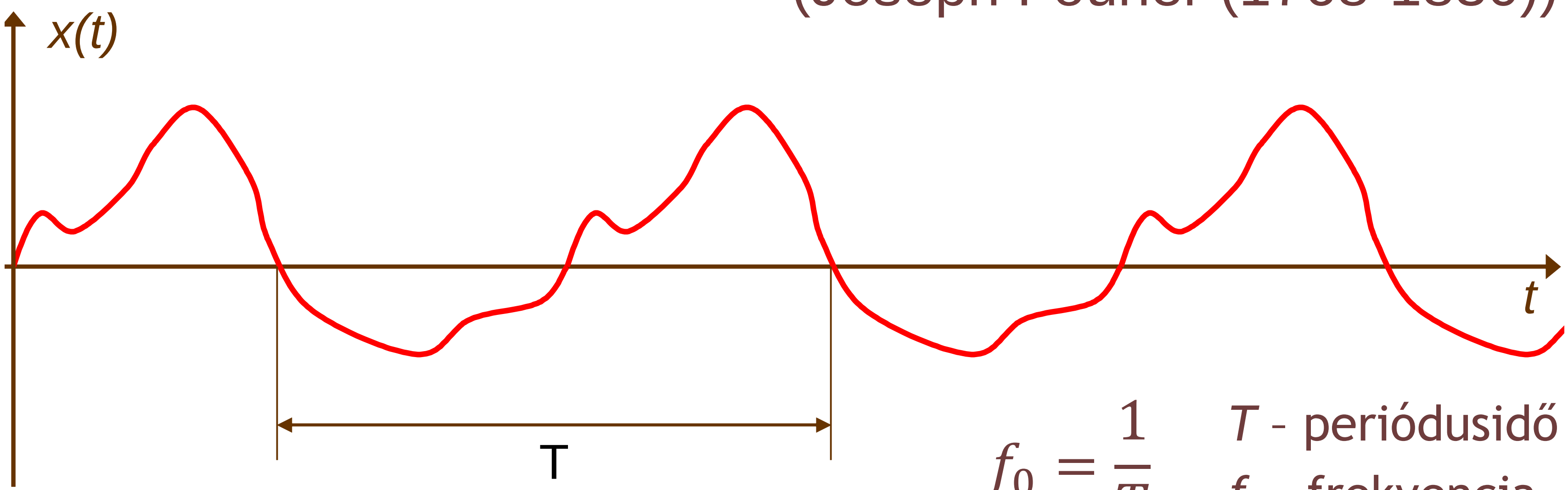
Determinisztikus jelek osztályozása

- Periodikus jelek
  - Szinuszos jelek
  - Komplex periodikus jelek (Fourier-sorok)
- Nem periodikus jelek
  - Kváziperiodikus jelek (→távközléstechnika)
  - Abszolút integrálható jelek (Fourier-transzformáció)
  - Energiakorlátos jelek (négyzetesen integrálható jelek, Fourier-transzformáció kiterjesztése)
  - Korlátos jelek (robusztus irányítások)

Periodikus jelek

Periodikus jelek leírása: **Fourier-sorok**

(Joseph Fourier (1768-1830))



$$f_0 = \frac{1}{T}$$

T - periódusidő

f_0 - frekvencia

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[a_k cos\left(2\pi \frac{kt}{T}\right) + b_k sin\left(2\pi \frac{kt}{T}\right)\right]$$

valós alak

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\frac{kt}{T}}$$

komplex alak

kapcsolat: Euler reláció

$$e^{i2\pi\frac{kt}{T}} = cos\left(2\pi \frac{kt}{T}\right) + isin\left(2\pi \frac{kt}{T}\right)$$

Periodikus jelek

A periodikus jelek frekvenciatartománybeli leírása:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k f_0 t} \qquad e^{i2\pi k f_0 t} = cos(2\pi k f_0 t) + isin(2\pi k f_0 t)$$

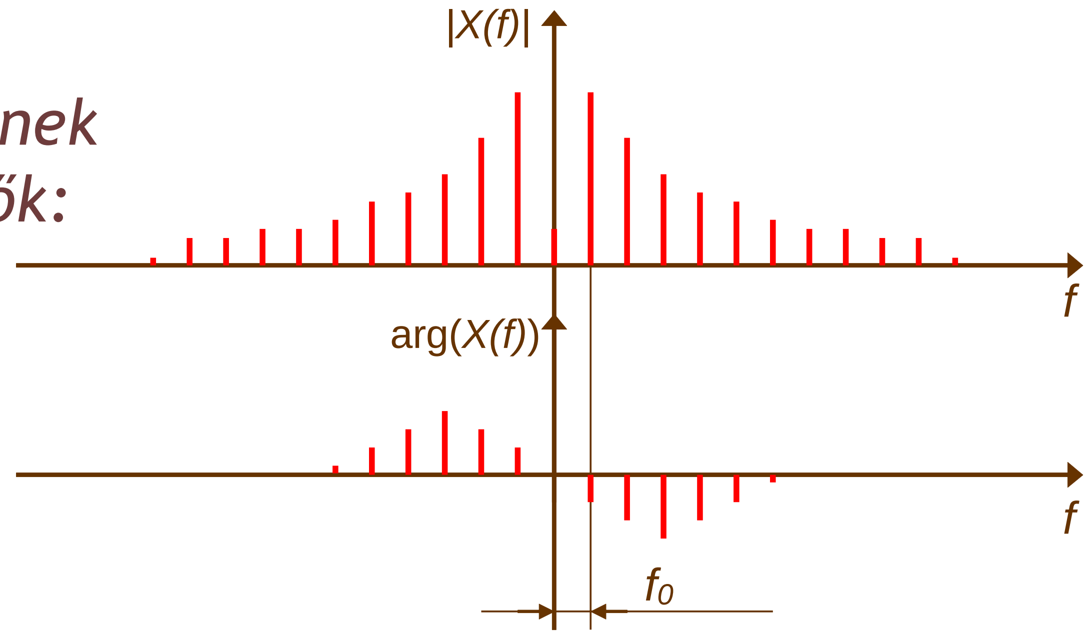
ábrázolás: abszolút érték és fázis

c_k együtthatók jelentése:

milyen súllyal szerepelnek a harmonikus összetevők:

vonalas spektrum

amplitúdó spektrum
fázis spektrum



Periodikus jelek

A Fourier-együtthatók meghatározása:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

k=0-ra, továbbá *k>0*-ra

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)cos\left(2\pi\frac{kt}{T}\right)dt \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)sin\left(2\pi\frac{kt}{T}\right)dt$$

illetve komplex alakban

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2\pi\frac{kt}{T}}dt$$

k egész számokra

Fourier-integrál

Periodikus jelek

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2\pi\frac{kt}{T}}dt$$

Fourier-integrál

Egyszerű esetben analitikusan kiértékelhető, egyébként – alkalmazzunk diszkrét közelítést.

Mintavételezzük a teljes periódust *N* pontban:

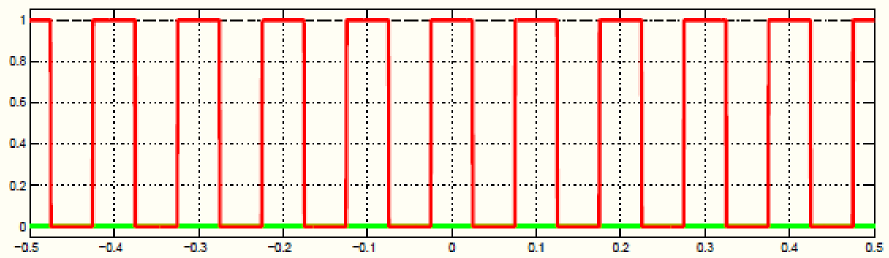
$$\Delta t = \frac{T}{N} \qquad x_l = x\left(l\frac{T}{n}\right) \qquad (l = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

$$c_k \approx \frac{1}{T}\frac{T}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-i\frac{2\pi}{T}kl\frac{T}{N}} \qquad c_k \approx \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-i2\pi\frac{kl}{N}}$$

Alakilag azonos a diszkrét Fourier-transzformációval, hatékony számítási algoritmus: gyors Fourier-transzformáció (FFT)

Periodikus jelek

Analitikus számítás: négyszögjel Fourier-sora



$$x(t) = \operatorname{sign}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) + \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{1}{f_0} \text{ periódusidő } (T = 0.1)$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{1}{2}$$

további $k > 0$ indexekre

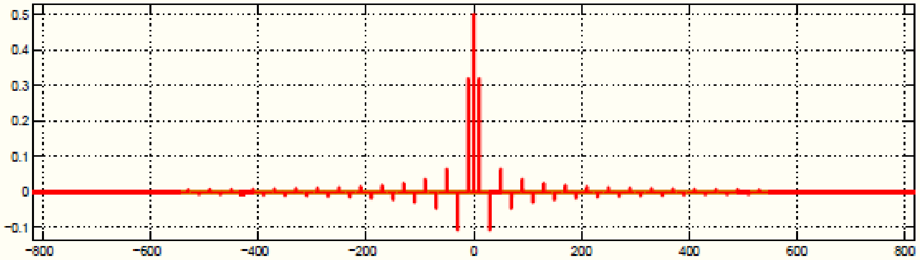
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}t}\,dt = \frac{1}{\left(-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}\right)T}\left[e^{-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}\frac{T}{4}} - e^{\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}\frac{T}{4}}\right]$$

$$= -\frac{1}{\mathtt{i}\,2\pi k}\left[e^{-\mathtt{i}\,k\frac{\pi}{2}} - e^{\mathtt{i}\,k\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{k\pi}\,\frac{e^{\mathtt{i}\,k\frac{\pi}{2}} - e^{-\mathtt{i}\,k\frac{\pi}{2}}}{2\,\mathtt{i}} = \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\{c_k\}_{-\infty}^{\infty} = \left\{\ldots, \frac{1}{5\pi}, 0, -\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}, 0, -\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{5\pi}, \ldots\right\}$$

Periodikus jelek

Analitikus számítás: négyszögjel Fourier-sora



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0; \\ \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right), & k \in \mathbb{Z} \neq 0. \end{cases}$$

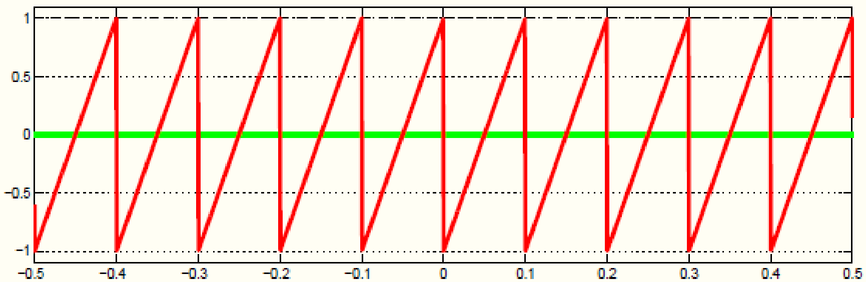
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} + e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}kt}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

Periodikus jelek

Analitikus számítás: fűrészfog-jel Fourier-sora



Alapperiódusa

$$x(t) = \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \qquad t \in [0, T]$$

$$T = \frac{1}{f_0} \text{ periódusidő } (T = 0.1)$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{továbbá } k \neq 0 \text{ indexekre}$$

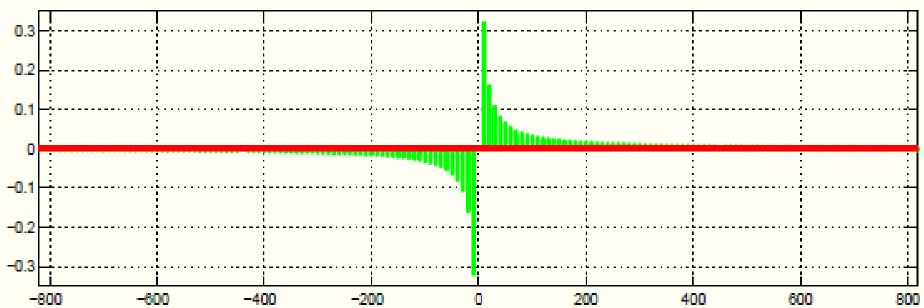
$$c_k = \frac{1}{T^2}\int_0^T t e^{-\mathtt{i}\,2\pi \frac{k}{T} t}\, dt = \quad \text{a konstans nullázódik, a maradék parciális integrálással}$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[tT\frac{e^{-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}t}}{(-\mathtt{i}\,2k\pi)}\right]_0^T - \frac{1}{T^2}\int_0^T e^{-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}t}\,dt = -\frac{e^{-\mathtt{i}\,2k\pi}}{\mathtt{i}\,2k\pi} = \frac{\mathtt{i}}{2k\pi}$$

a második tag 0, mivel $e^{-\mathtt{i}\,2\pi\frac{k}{T}t}$ teljes periódusra vonatkozó integrálja.

Periodikus jelek

Analitikus számítás: fűrészfog-jel Fourier-sora



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0; \\ -\frac{1}{\mathtt{i}\,2k\pi}, & k \in \mathbb{Z} \neq 0. \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} =$$

$$= -\frac{1}{\mathtt{i}\,2\pi} \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{1}{k} e^{\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathtt{i}\,2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{1}{k} \left[\frac{e^{\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{T}kt} - e^{-\mathtt{i}\,\frac{2\pi}{T}kt}}{2\,\mathtt{i}} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

Periodikus jelek

A Fourier-sorok létezése, konvergenciája:

a matematika egy bonyolult problémája

Fourier konvergencia tétel:

Tétel

Ha f periodikus függvény T periódusidővel, továbbá f és f' szakaszonként folytonos a $[0, T]$ intervallumban, akkor a

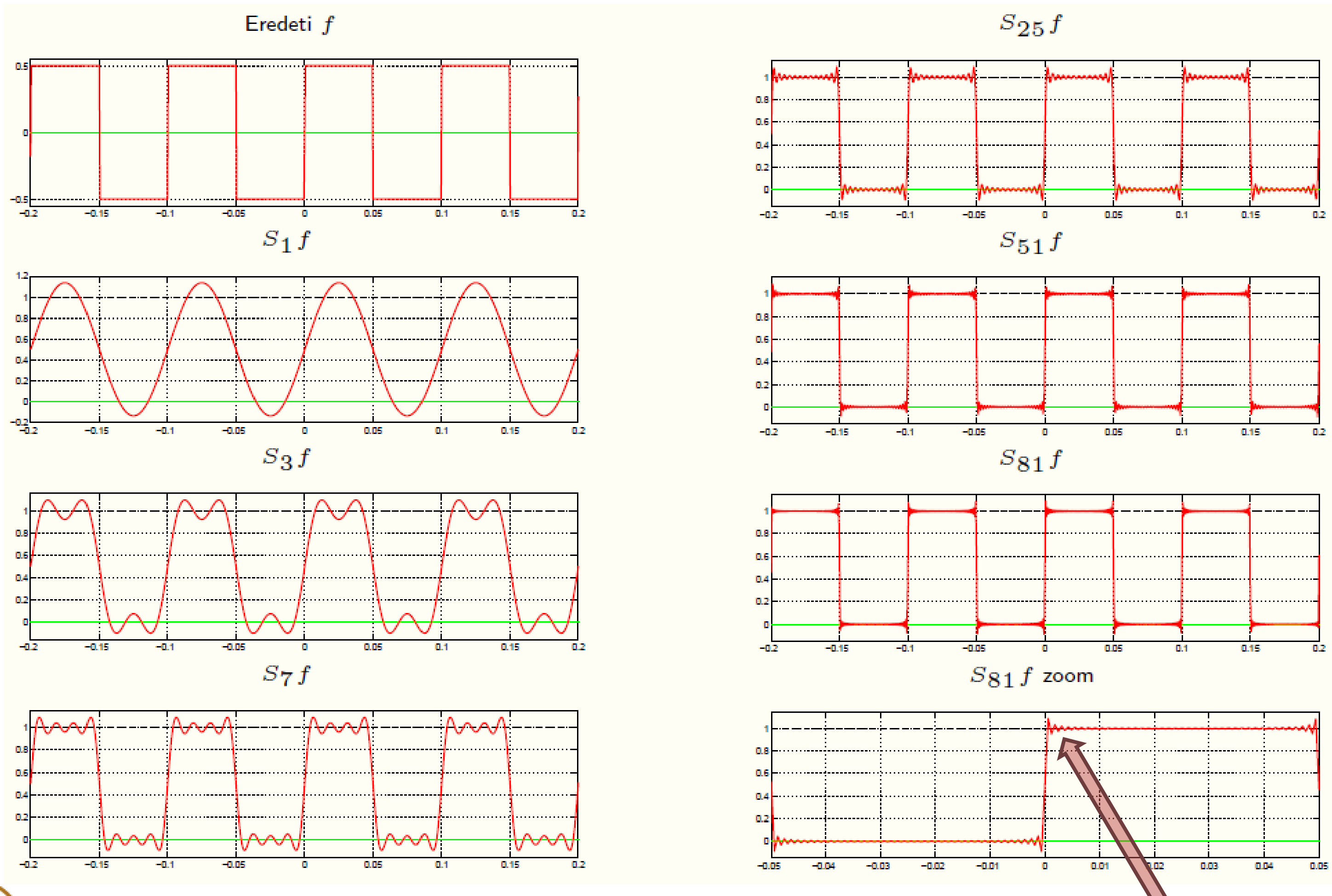
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\,\frac{2\pi}{T}kt}$$

Fourier–sor konvergens, és $f(t)$-hez tart minden olyan pontban, ahol f folytonos. Azokon a t helyeken, ahol az f függvénynek szakadása van, a sorösszeg a jobb- és baloldali határérték aritmetikai átlagával egyenlő, azaz

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)].$$

Periodikus jelek

Példák konvergenciára: négyszögjel

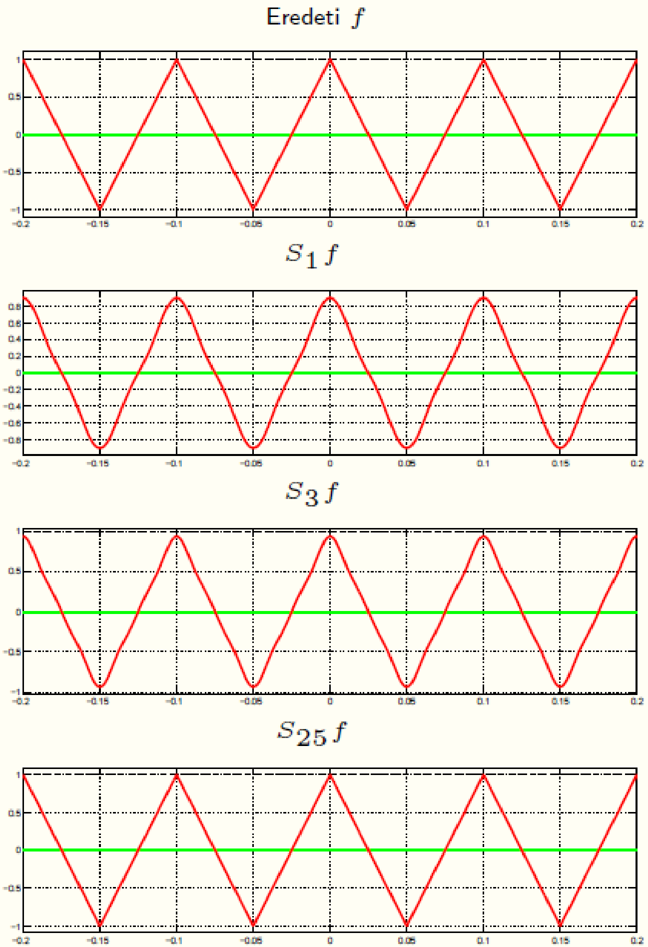


„Gibbs jelenség”

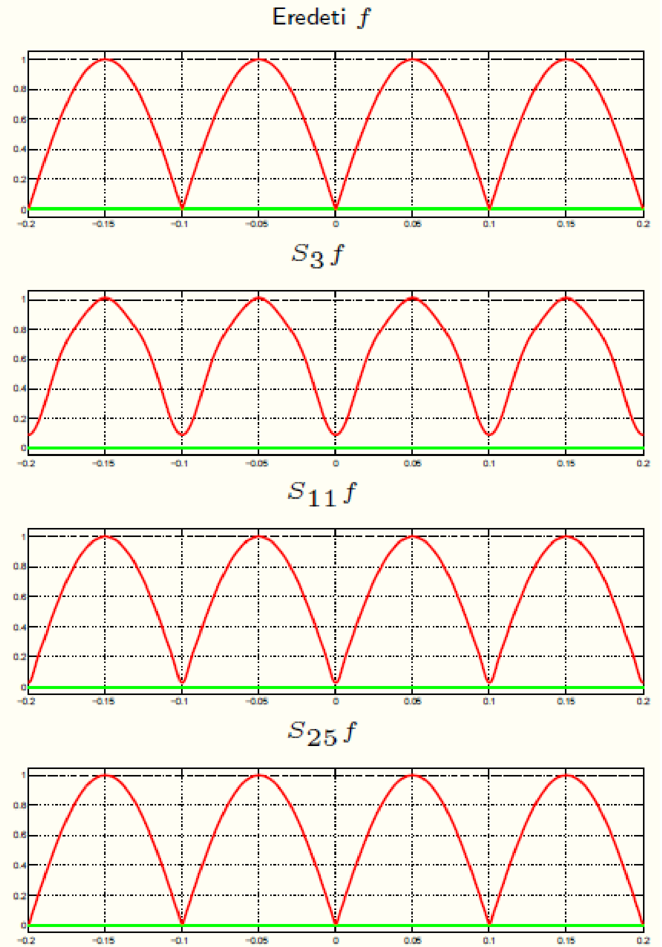
Periodikus jelek

Példák konvergenciára:

Háromszög jel



Kétutasan egyenirányított szinusz



Periodikus jelek

A Fourier konvergencia tétel a Fourier-sorok létezésére, konvergenciájára nem ad kielégítő eredményt számos fontos függvényosztály esetében, pl. a négyzetesen integrálható periodikus függvények esetében:

$L^2(0,T)$ jelek:

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

$$\Leftrightarrow$$

l^2 sorozatok:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

$L^2(0,T)$ norma:

$$\|x(t)\|_{L^2(0.T)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

l^2 norma:

$$\|c\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

A Fourier-sorok $L^2(0,T)$ normában való konvergenciája a XX. századi matematika egy bonyolult problémája volt, általános megoldás nem született rá, számos tétel került bizonyításra ...

Periodikus jelek

A talán legsikeresebb: **Riesz-Fischer tétel**

Tétel

Minden $\{c_k\} \in \ell^2$ *sorozathoz találunk olyan* $f(t) \in \mathrm{L}^2(0,T)$ *függvényt, amelyre*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T)}.$$

Részletösszeg, Cesáro-közép: $x(t)$ T szerint periodikus fv.

$$S_n x = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i2\pi k f_0 t} \qquad \sigma_n x = \frac{S_0 x + S_1 + \cdots + S_N}{N+1}$$ *szummációs eljárás*

Ha $x(t) \in L^2(0,T)$, *akkor* $\lim_{N\to\infty} \|x - \sigma_N x\|_{L^2(0,T)}.$

Konvergencia - szummációs eljárások révén teljesül.

Nem-periodikus jelek: jelterek

Nincs általános elmélete a nem-periodikus jeleknek, osztályokba soroljuk őket – egy-egy osztályon belül írjuk le közös tulajdonságaikat.

Az osztályozás alapja: lineáris függvényterek - olyan terek, amelyek elemei függvények, és amelyekben az összeadás és a számmal (skalárral) való szorzás műveletére fennáll a linearitás, azaz, ha $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elemei az *L* térnek, akkor

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \in L$$

Végtelen dimenziós terek: a funkcionálanalízis foglalkozik velük.

Jelterek: lineáris terek, amelyek elemei x(t) függvények

Mi speciális jelterekkel foglalkozunk:

- Abszolút integrálható jelek tere
- Négyzetesen integrálható jelek tere
- Korlátos jelek tere

Nem-periodikus jelek: jelterek

- **Abszolút integrálható jelek: az L^1 tér**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

egy norma: $$\|x\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt$$

Ha egy térben létezik norma, normált térnek nevezzük.

Ha egy normált térben minden normában konvergens sorozat a tér valamely eleméhez konvergál, Banach térnek nevezzük.

Az L^1 tér normált tér, és Banach tér.

Nem-periodikus jelek: jelterek

- **Négyzetesen integrálható jelek: az L^2 tér**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Nevezik még az energiakorlátos függvények terének.

Miért? – A négyzetes integrál kapcsolatba hozható a jel energia-tartalmával:

(villamos példa) $P = IU = RI^2 \quad E = R\int_{-\infty}^{\infty} |I(t)|^2 dt$

Norma: $\|x\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$

Az L^2 tér: normált tér és Banach tér

Nem-periodikus jelek: jelterek

Az $\boldsymbol{L^2}$ tér speciális tulajdonsága, hogy definiálhatunk benne belső szorzatot (skaláris szorzat).

$$x, y \in L^2 \qquad \langle x, y\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}dt$$

A belső szorzat révén tudjuk definiálni az ortogonalitás fogalmát: x és y ortogonálisak egymással, ha $\langle x, y\rangle_{L^2} = 0$.

Az ortogonalitás révén felvehető koordináta rendszer, azaz definiálható bázis, amelyben tetszőleges térbeli függvény kifejezhető a bázis elemeinek lineáris kombinációjával. Az L2 tér bázisai végtelen sok elemet tartalmaznak.

Ha egy térben létezik belső szorzat, belsőszorzat térnek nevezzük.

Ha egy belsőszorzat térben minden normában konvergens sorozat a tér valamely eleméhez konvergál, Hilbert térnek nevezzük.

Az $\boldsymbol{L^2}$ tér Hilbert tér.

Nem-periodikus jelek: jelterek

- **Korlátos jelek: az L^∞ tér**

$$\max_{-\infty<x<\infty} |x(t)| < \infty$$

A függvényértékben (amplitúdóban) korlátos jelek.

Norma: $$\|x\|_{L^\infty} = \max_{-\infty<x<\infty} |x(t)|$$

sup – mert nem biztos, hogy a függvény a maximumát felveszi

Precízebben: $$\|x\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} |x(t)|$$

ess – bővebb függvényosztályra igaz, megszámlálhatóan sok elszigetelt szingularitás megengedett

Az L^∞ tér Banach tér.

A Fourier transzformáció

Egy $x(t) \in L^1$ jel **Fourier-transzformáltja**

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \qquad \omega = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

A Fourier-transzformáció kiterjeszthető $x(t) \in L^2$ jelekre

a $\delta(t)$ Dirac-delta fogalmával (Plancherel-féle elmélet).

Ennek megfelelően:

az $x(t) \in L^2$ Fourier-transzformáltja egy $X(\omega) \in L^2$ függvény.

létezik inverz transzformáció:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A Fourier transzformáció

A Fourier-transzformált jelentése:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$e^{i\omega t} = cos(\omega t) + i\, sin(\omega t)$$

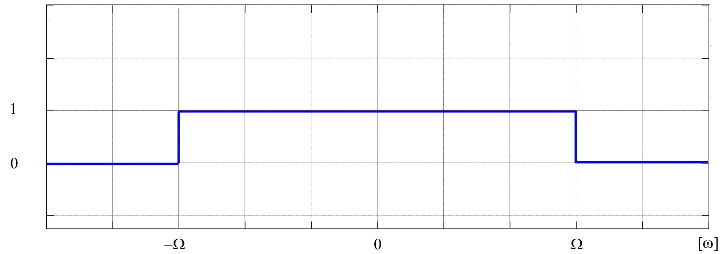
az Euler reláció

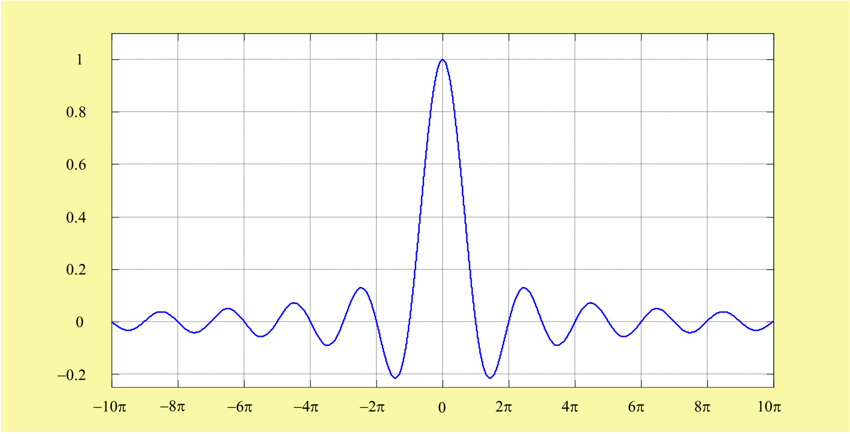
$X(\omega)$ egy súlyfüggvény:

a különböző frekvenciájú sin és cos függvényekhez (periodikus komponensekhez) tartozó súlyok

Egy példa:

négyszögletes ablakfüggvény, vagy karakterisztikus függvény





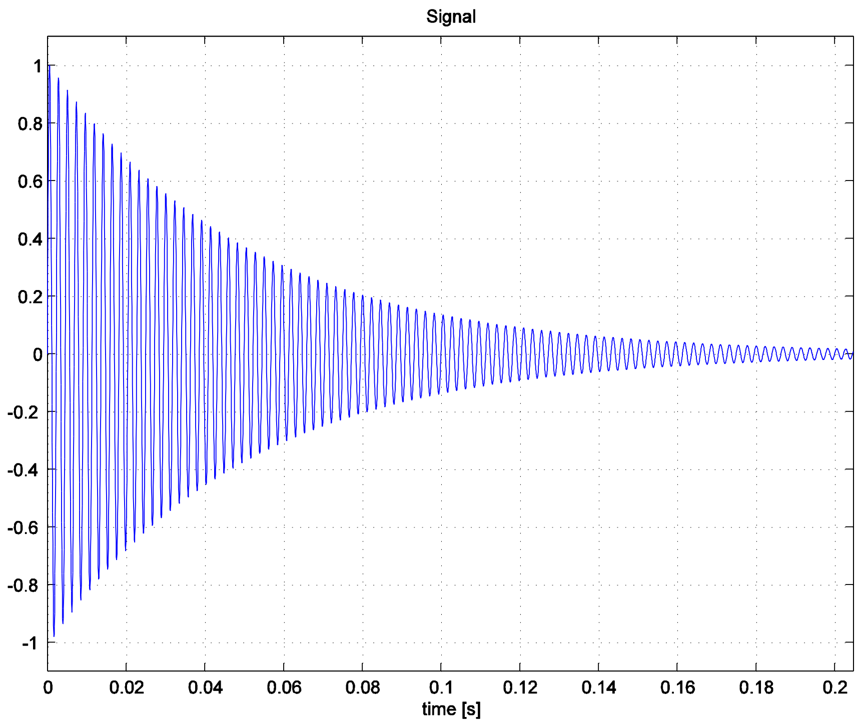
(Páros függvény Fourier transzformáltja valós függvény)

A Fourier transzformált

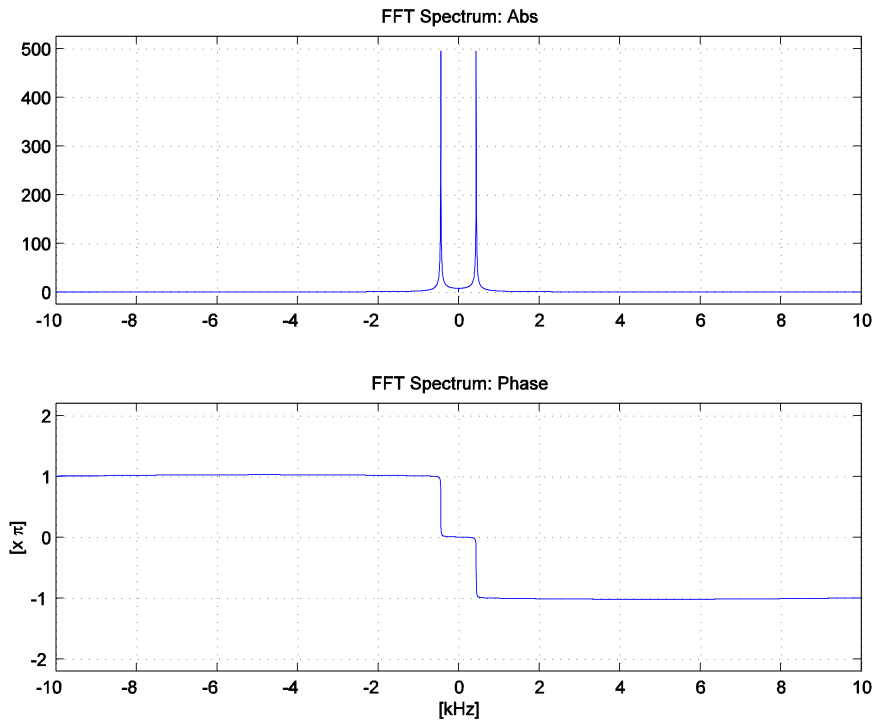
A Fourier-transzformált: valós változós komplex függvény

$$X(\omega) \quad - \quad X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$

Példa: csillapodó szinusz jel

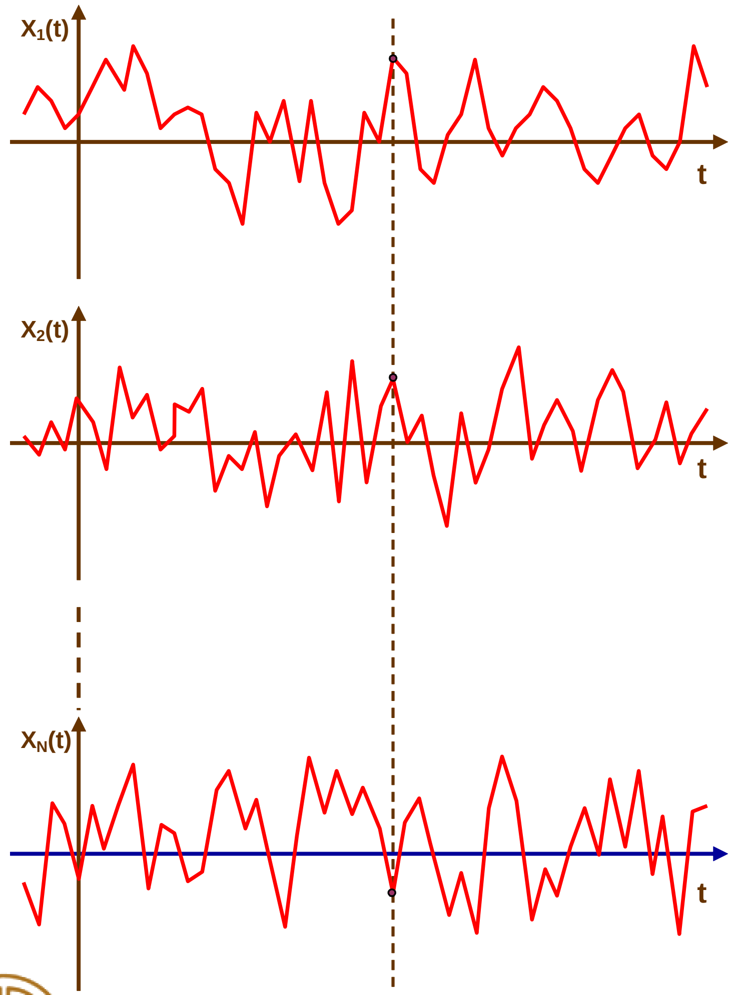


$|X(\omega)|$ amplitúdó spektrum: páros



$arg\big(X(\omega)\big)$ fázis spektrum: páratlan

Sztochasztikus jelek



t-ben (idő) paraméterezett valószínűségi változó-sokaság:

- végtelen sok realizáció - x_i
- minden realizáció különböző *x(t)* időfüggvény

Középérték:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x}(t) = E[x(t)] = \mu_x(t)$$

várható érték, 1. momentum

Sztochasztikus jelek

Sztochasztikus jelek analízise:

Determinisztikus jellemzőket igyekszünk leszűrni belőlük.

Példák:

- Valószínűségi eloszlás- ill. sűrűségfüggvények
- Várható értékek, momentumok
- Korrelációs-, és kovariancia függvények
- Spektrális függvények, stb.

Momentumok

Momentumok:

1. momentum $\mu_x(t) = E[x(t)]$ középérték

2. momentum $\psi_x^2(t) = E[x^2(t)]$ négyzetes közép

k. momentum $\alpha_x^k(t) = E[x^k(t)]$

Centrális momentumok:

2. centrális momentum $\sigma_x^2(t) = E[(x(t) - E[x(t)])^2]$ szórásnégyzet

k. centrális momentum $\gamma_x^k(t) = E[(x(t) - E[x(t)])^k]$

Momentumok

Együttes momentumok:

$$R_x(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_k) = E[x(t)x(t+\tau_1)(t+\tau_2)\dots(t+\tau_k)]$$ *k. momentum*

$$C_x(t,\tau_1,\dots,\tau_k) = E[(x(t)-E[x(t)])(x(t+\tau_1)-E[x(t+\tau_1)])\dots$$

$$\dots(x(t+\tau_k)-E[x(t+\tau_k)])]$$ *k. centrális momentum*

Leggyakrabban alkalmazott együttes momentumok:

1. momentum: *autokorreláció* függvény

$$R_x(t,\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

1. centrális momentum: *autokovariancia* függvény

$$C_x(t,\tau) = E[(x(t)-E[x(t)])(x(t+\tau)-E[x(t+\tau)])]$$

Sztochasztikus jelek

Stacionaritás:

- Egy sztochasztikus jel akkor ***stacionárius***, ha minden momentuma és együttes momentuma időtől független.
- Egy sztochasztikus folyamat valamilyen N rendben gyengén stacionárius, ha legalább az első N momentuma és együttes momentuma időtől független.

Stacionárius jelekre:

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$$

Időátlag

$$E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

Összesség-átlag

Sztochasztikus jelek

Ergodicitás:

$$E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt \qquad E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

Időátlag **Összesség-átlag**

Egy stacionárius sztochasztikus jel ***ergodikus***, ha az **összesség-** és az **időátlagra** képzett momentumai és együttes momentumai azonos értékűek.

Az ergodicitás is lehet gyenge: csak valahányadik momentumig igaz.

Sztochasztikus jelek

Sztochasztikus jelek szokásos osztályozása

- Stacionárius jelek
  - Ergodikus jelek
  - Nemergodikus jelek
- Instacionárius jelek

Az ergodikus stacionárius jelek analízisére rendelkezünk általánosan használható eszközökkel.

Nemergodikus és instacioner jelek speciális eseteire vannak analízis módszerek.

Sztochasztikus jelek

Más szempontú osztályozás: valószínűségi eloszlás szerint

- Egyenletes eloszlású jelek
- Normális (Gauss) eloszlású jelek
- … különböző más eloszlású jelek

A normális (Gauss) eloszlású sztochasztikus jelek központi szerepet játszanak a jelfeldolgozásban.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Első és második momentumai teljesen leírják a folyamatot (μ,σ).
- A központi határeloszlás tétel szerint tetszőleges eloszlású folyamatok összege a normális eloszlású folyamathoz tart.

Korrelációanalízis

Autokorreláció, autokovariancia

Egy sztochasztikus folyamat különböző időpontokhoz tartozó értékei közti reláció mérésére:

$$R_x(t,\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$C_x(t,\tau) = E[(x(t) - E[x(t)])(x(t+\tau) - E[x(t+\tau)])]$$

Keresztkorreláció, keresztkovariancia

Két sztochasztikus folyamat különböző időpontokhoz tartozó értékei közti reláció mérésére:

$$R_{xy}(t,\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$C_x(t,\tau) = E[(x(t) - E[x(t)])(x(t+\tau) - E[x(t+\tau)])]$$

Korrelációanalízis

Korreláció

- Két változó közti kapcsolat - reláció - mértéke.
- Önmagában nem jelent ok-okozati összefüggést.
- A korrelálatlanság nem feltétlenül jelent függetlenséget (statisztikai vagy köznapi értelemben sem)

Igazak a következő állítások:

- Ha két jelenség között ok-okozati kapcsolat áll fenn, a jelenségekhez tartozó változók korreláltak.
- Ha két változó független, akkor korrelálatlan is.

Fordítva nem feltétlenül igazak.

Korreláció analízis

A gyakorlatban változók közti összefüggések – így ok-okozati összefüggések – meghatározására használjuk (kellő óvatossággal).

Korrelációanalízis

Stacionárius folyamatokra:

Autokorreláció, autokovariancia

$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$

$C_x(\tau) = E[(x(t)-\mu_x)(x(t+\tau)-\mu_x)]$ $\quad\quad \mu_x = E[x(t)]$

Keresztkorreláció, keresztkovariancia

$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$ $\quad\quad \mu_x = E[x(t)]$

$C_{xy}(\tau) = E\big[(x(t)-\mu_x)\big(y(t+\tau)-\mu_y\big)\big]$ $\quad\quad \mu_y = E[y(t)]$

A korreláció- és kovariancia függvények csak τ eltolási időtől függnek.

Spektrumanalízis

Sztochasztikus jelekre nem teljesül az abszolút vagy négyzetes integrálhatóság

— nem létezik Fourier-transzformáltjuk

Ergodikus stacionárius sztochasztikus jelek *spektrális* függvénye:

Autokorreláció (autokovariancia) függvényük Fourier-transzformáltja

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega t} d\tau \quad \text{ahol} \quad R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

az **auto-teljesítménysűrűség függvény**

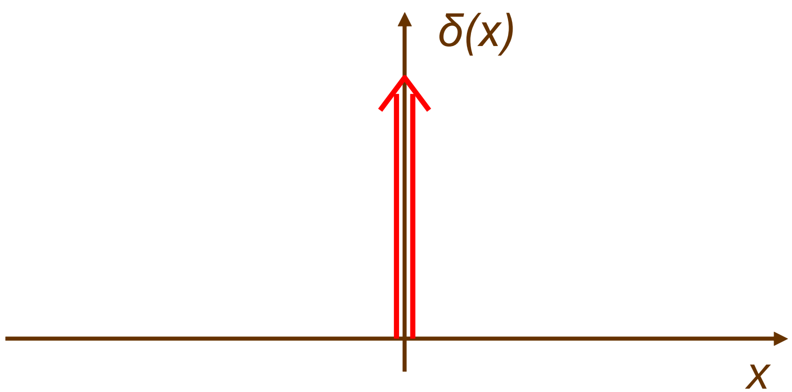
(APSD – Auto Power Spectral Density)

Spektrumanalízis

Létezik az autokorreláció (autokovariancia) függvény Fourier-transzformáltja?

Az autokorreláció függvény nem feltétlenül L^2 térbeli függvény, de

korlátos jelek autokorreláció (autokovariancia) függvénye a Dirac-δ megengedésével Fourier-transzformálható.



Végtelenül keskeny és magas impulzus: nem függvény!

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Paul Dirac francia fizikus vezette be, precíz matematikai megalapozása: disztribúcióelmélet.

Spektrumanalízis

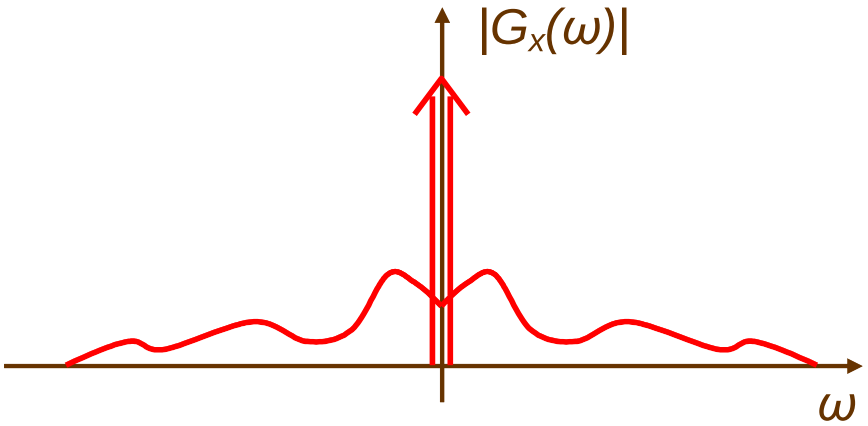
0-tól különböző középértékű jel:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[(\bar{x} + \tilde{x}(t))(\bar{x} + \tilde{x}(t+\tau))] =$$
$$= E[\bar{x}^2 + \bar{x}(\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t+\tau)) + \tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau)] =$$
$$= \bar{x}^2 + \bar{x}E[\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t+\tau)] + E[\tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau)] = \bar{x}^2 + C_x(\tau)$$

mivel $E[\tilde{x}(t)] = 0,\ E[\tilde{x}(t+\tau)] = 0.$

Azonosan állandó függvény Fourier-transzformáltja nullától különböző esetben nem létezik, de kiterjesztett értelemben

$$G_x(\omega) = \delta(\omega)$$



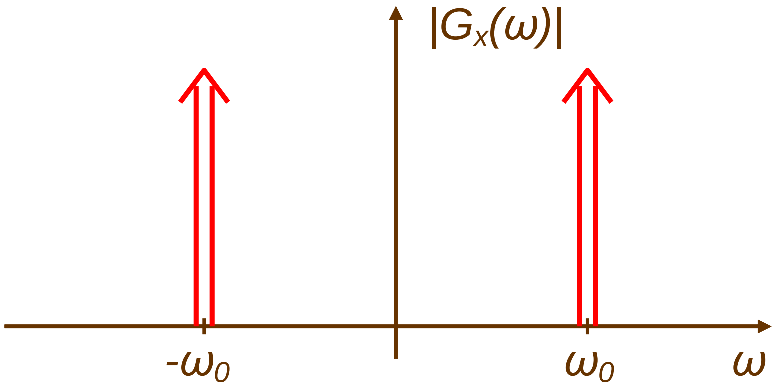
Spektrumanalízis

Szinusz-jel: $x(t) = \sin \omega_0 t$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t+\tau)] = \\ &= E[\sin\omega_0 t(\sin\omega_0 t\cos\omega_0\tau + \cos\omega_0 t\sin\omega_0\tau)] = \\ &= E[\sin^2\omega_0 t\cos\omega_0\tau + \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\sin\omega_0\tau)] = \\ &= \cos\omega_0\tau E[\sin^2\omega_0 t] + \sin\omega_0\tau E[\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t] = \\ &= \cos\omega_0\tau E[\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}] + \sin\omega_0\tau E[\frac{\sin 2\omega_0 t}{2}] = \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau \end{aligned}$$

A Fourier-transzformáltja nem létezik, de kiterjesztett értelemben

$$G_x(\omega) = \delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)$$



Spektrumanalízis

$G_x(\omega)$ $G_x(f)$ auto-teljesítménysűrűség függvény
APSD – Auto Power Spectral Density

Főbb tulajdonságai:

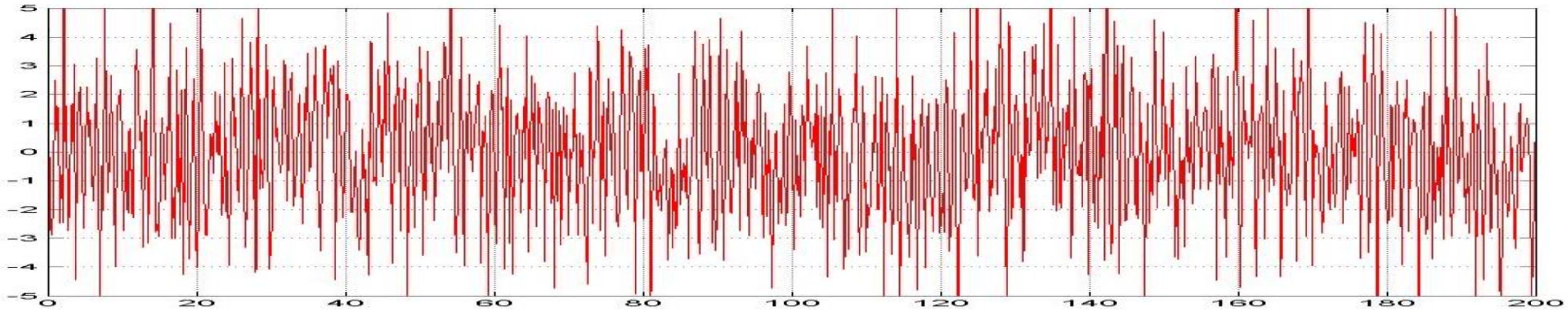
$$|G_x(\omega)| = G_x(\omega)$$
valós függvény

$$G_x(-\omega) = G_x(\omega)$$
páros függvény

Lineáris rendszer átvitele:

$$G_y(\omega) = |W(\omega)|^2 \, G_x(\omega)$$ x – bemeneti, y – kimeneti jel

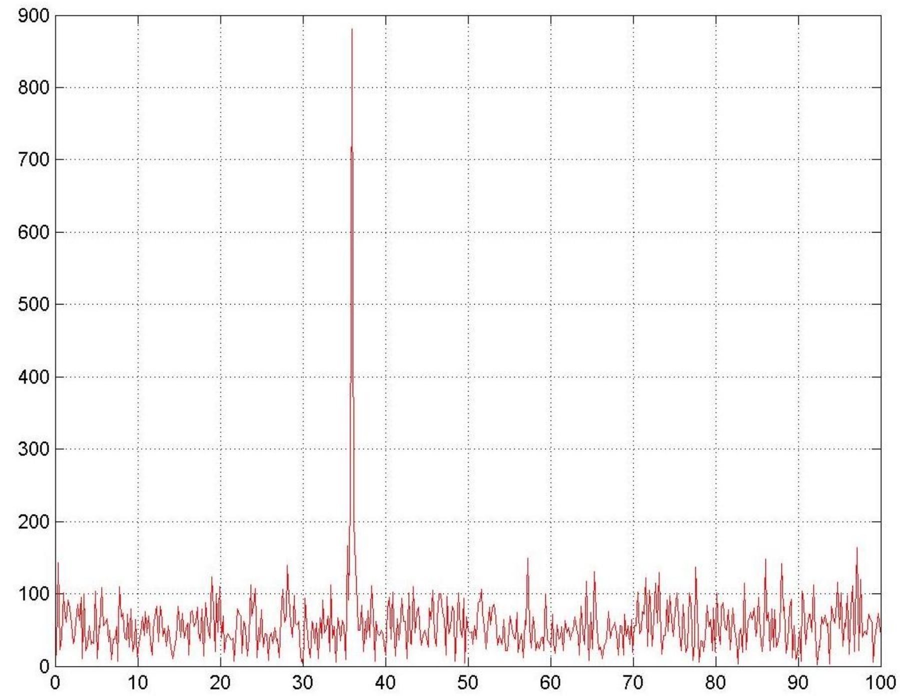
Spektrumanalízis példa



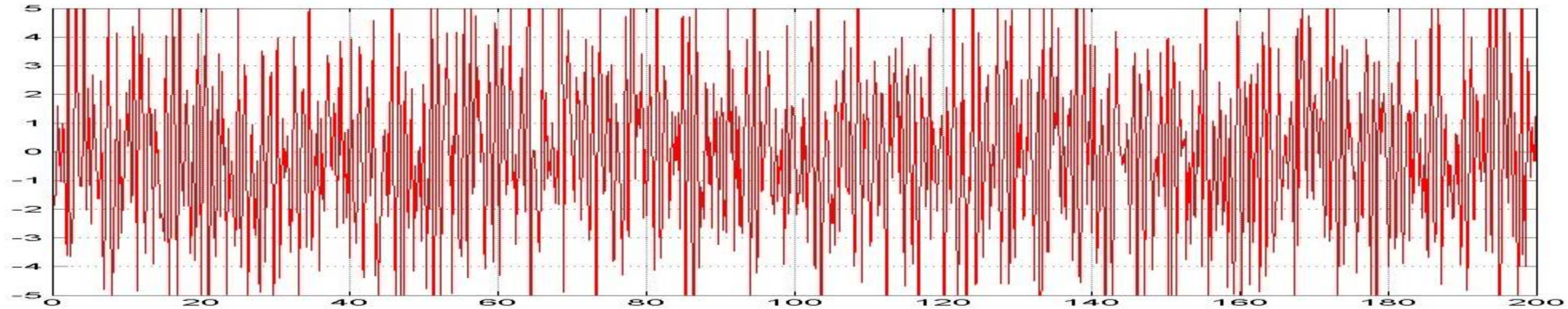
Időtartománybeli jel

Teljesítménysűrűség spektrum (APSD)

a pozitív frekvenciákhoz tartozó részt ábrázoltuk



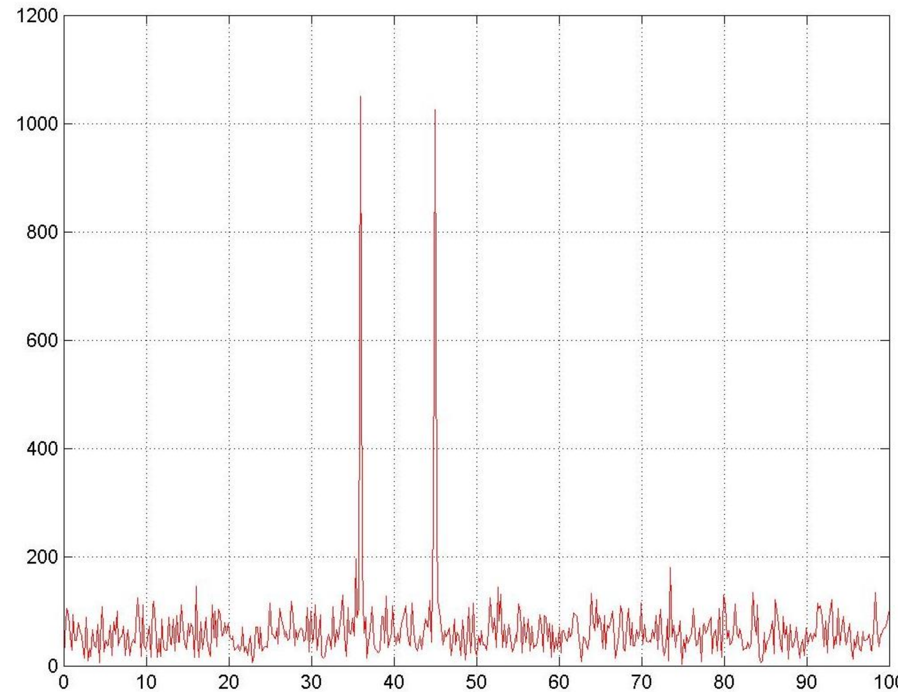
Spektrumanalízis példa



Időtartománybeli jel

Teljesítménysűrűség spektrum (APSD)

a pozitív frekvenciákhoz tartozó részt ábrázoltuk



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros

MŰEGYETEM 1782

email: soumelidis@sztaki.hu