ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK I.
6. A MINTAVÉTELI TÖRVÉNY

MŰEGYETEM 1782

Dr. Soumelidis Alexandros

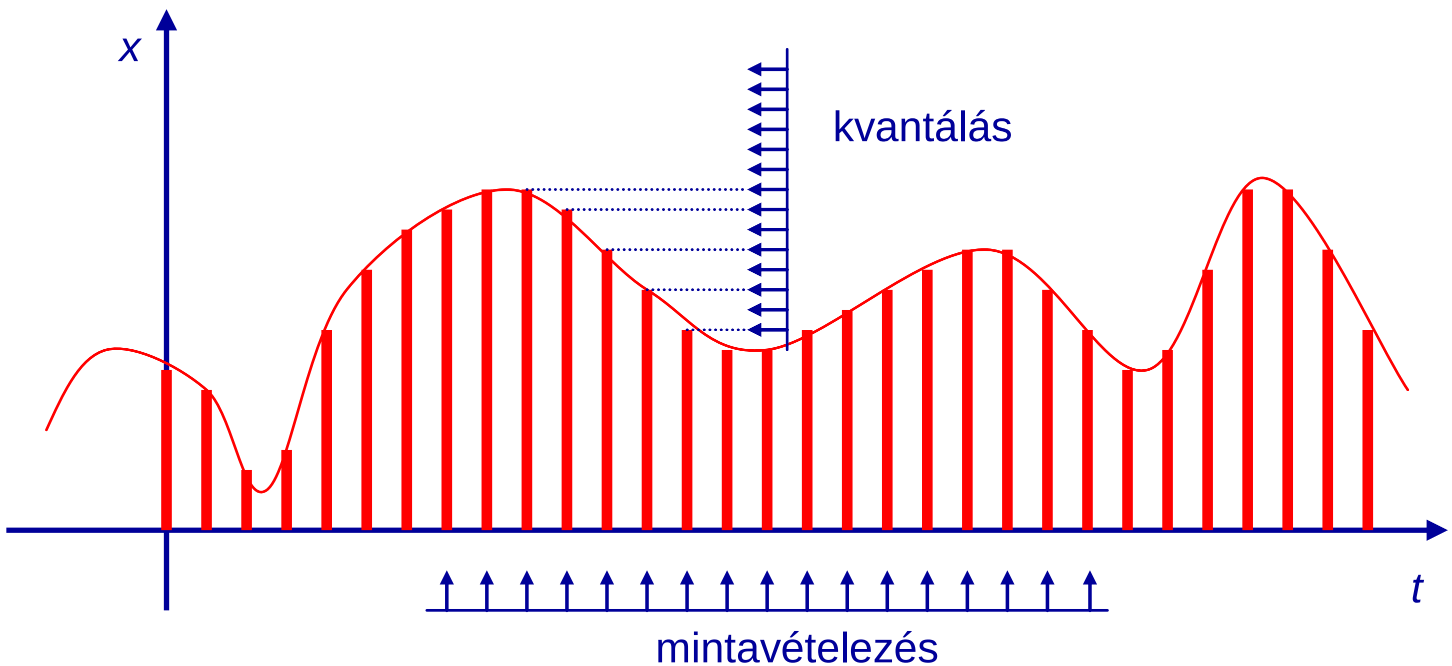
2020.10.22.

BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

Mintavételezés és kvantálás

A digitális jelfeldolgozás tárgya: numerikus adatsorozatok formájában kifejezett jelek – diszkretizáció időben és a jelértékekben

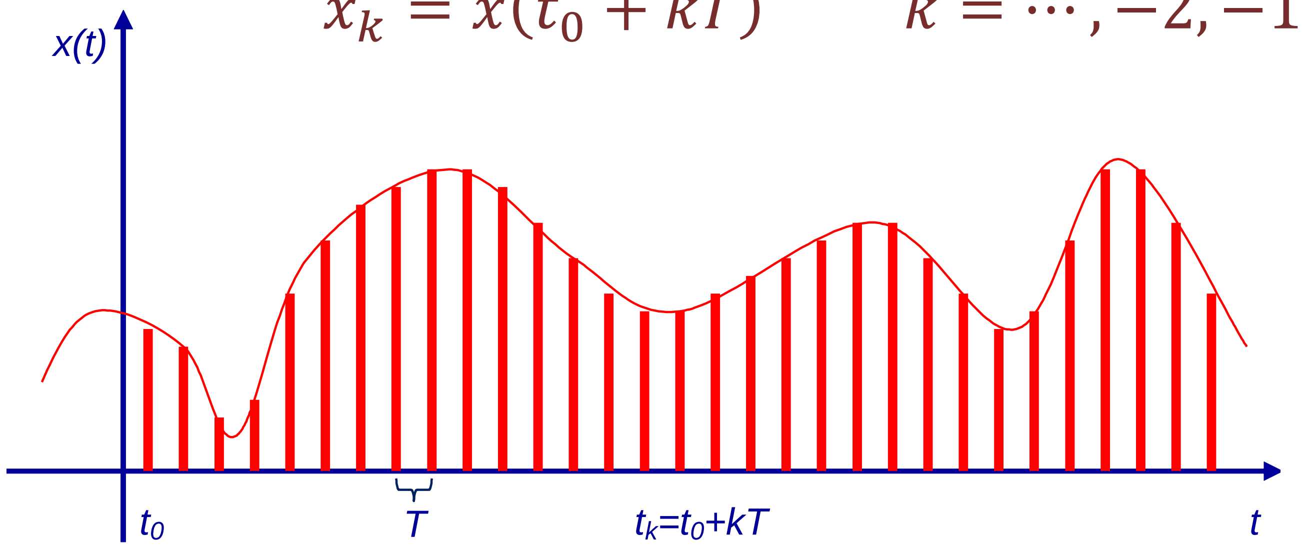
⇒ mintavételezés és kvantálás



Mintavételezés a jelfeldolgozásban

A mintavételezés szokásos formája a digitális jelfeldolgozásban az egyenletes mintavétel, vagyis az időtengelyt ekvidisztáns módon osztjuk fel T periódussal úgy, hogy az *x(t)* függvény mintaértékeinek x_k sorozata a következőképpen adódik:

$$x_k = x(t_0 + kT) \qquad k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$



[Speciális jelfeldolgozási módszerek alkalmaznak nem-egyenletes mintavételt, de a digitális jelfeldolgozásban döntően alkalmazott spektrális és idősor-analízis módszerek az egyenletes mintavételezést tételezik fel.]

Mintavételezés a jelfeldolgozásban

Alapvető kérdések:

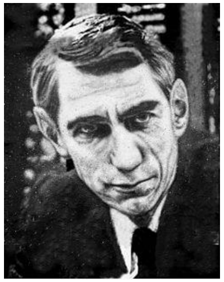
- Keletkezik-e információveszteség a mintavételezés során?
- Van-e rá mód, hogy a mintavételezést információveszteség nélkül hajtsuk végre?
- Visszaállítható-e a folytonos idejű jel a mintaértékeiből?

A választ a mintavételezés elméletén belül a

mintavételi törvény adja.

Mintavételezés a jelfeldolgozásban

A köztudat szerint a mintavételezés elméletének alapjait Claude Shannon tette le 1949-ben megjelent tanulmányával.



Előtte hasonló eredményhez jutottak:

Edmund Whittaker
1915

Harry Nyquist
1928

Vladimir Alexandrovich Kotelnikov
1928

A mintavételezés elméletének alapvető állítását képező törvényt így Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon törvénynek nevezhetnénk leginkább

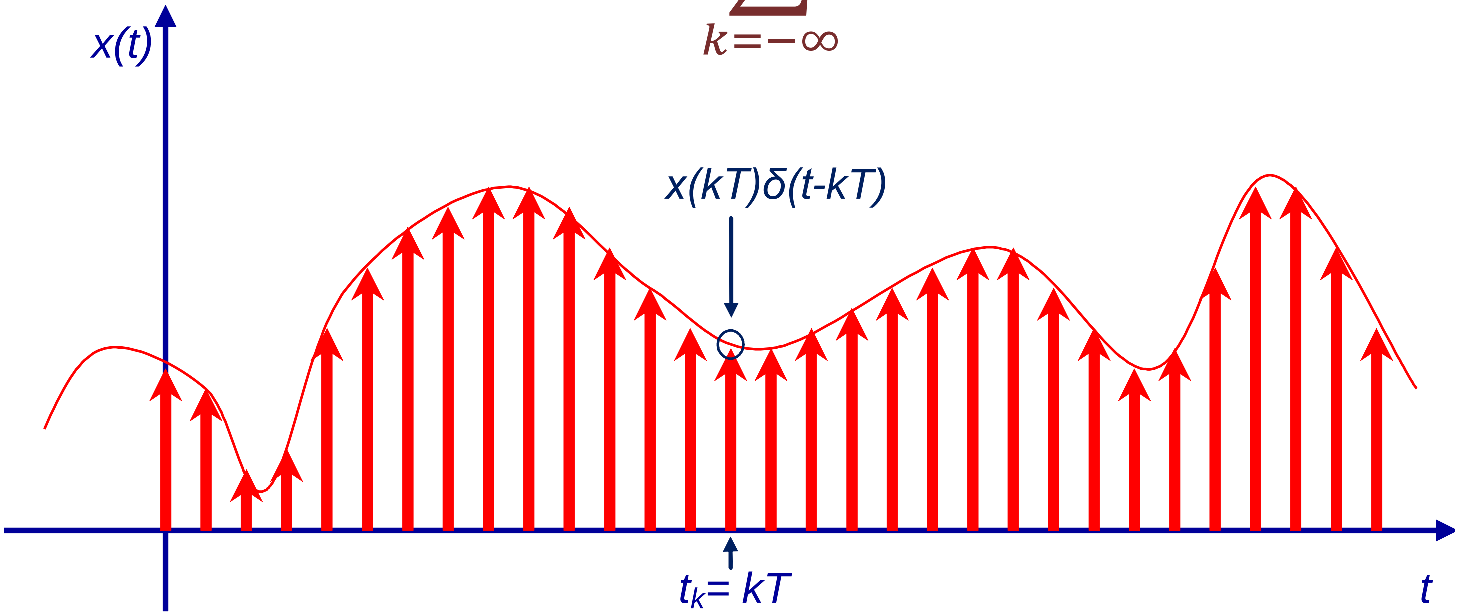
Már Leonhard Euler megalapozta a mintavételi törvényt a 18. században az interpolációk elméletének kidolgozásában végzett tevékenysége során.

Szokásos szakirodalmi hivatkozások: Shannon, Nyquist-Shannon, Shannon-Kotelnikov mintavételi tétel/törvény (theorem/rule), továbbá a matematikában „Cardinal Theorem of Interpolation Theory”

A mintavételezés modellje

A mintavételezést *impulzus-modulációként* lehet felfogni a *Dirac-delta* impulzus fogalmának alkalmazásával:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT)$$



Ez nyilvánvalóan egy absztrakt modell.

A mintavételezés modellje

A mintavételezett és az eredeti folytonos idejű jel viszonyának leírását a frekvencia-tartományban tudjuk nyomon követni

$\Longrightarrow$ Fourier-transzformáció

$x^*(t)$ Fourier-transzformáltját formálisan a következőképpen kapjuk:

$$\hat{x}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, e^{-i\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')e^{-i\omega t'} dt' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, e^{-i\omega kT}$$

mivel a δ-disztribúció Fourier-transzformálja definíció szerint azonosan 1.

A mintavételezés törvényszerűségei

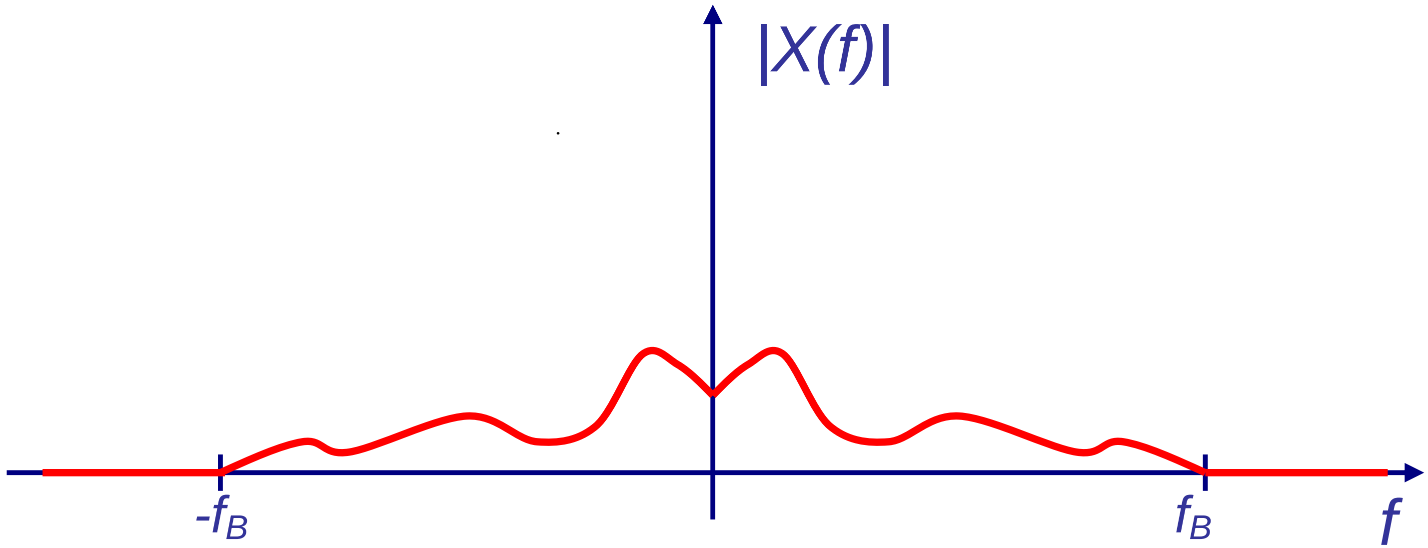
Legyen $x(t)$ egy $L^1(\mathbb{R})$ vagy $L^2(\mathbb{R})$ térhez tartozó függvény, Fourier-transzformáltját jelöljük $\hat{x}(\omega)$-val. A mintavételezett jel Fourier-transzformáltja:

$$\hat{x}^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, e^{-i\omega kT}$$

Ez egy periodikus függvény Fourier-sora, periódusa a körfrekvencia változójában $2\pi/T$. Ezzel ellentétben az eredeti jel Fourier-transzformáltja, $\hat{x}(\omega)$, a teljes $\mathbb{R}$-ben értelmezett függvény – nyilvánvaló, hogy általános esetben nem lehetnek azonosak: a diszkrét reprezentáció torzít.

Azonban, ha az eredeti jel Fourier-transzformáltja, $\hat{x}(\omega)$ véges kiterjedésű, és 0-tól különböző része a $[-\pi/T, \pi/T]$ tartományba esik, azaz a jel *sávkorlátozott* $\omega_B = \pi/T$ korláttal, a mintavételezett jel Fourier-transzformáltja alap-periódusában megegyezik az eredeti transzformálttal – a mintavételezés *mentes* az információvesztéstől.

A mintavételezés törvényszerűségei



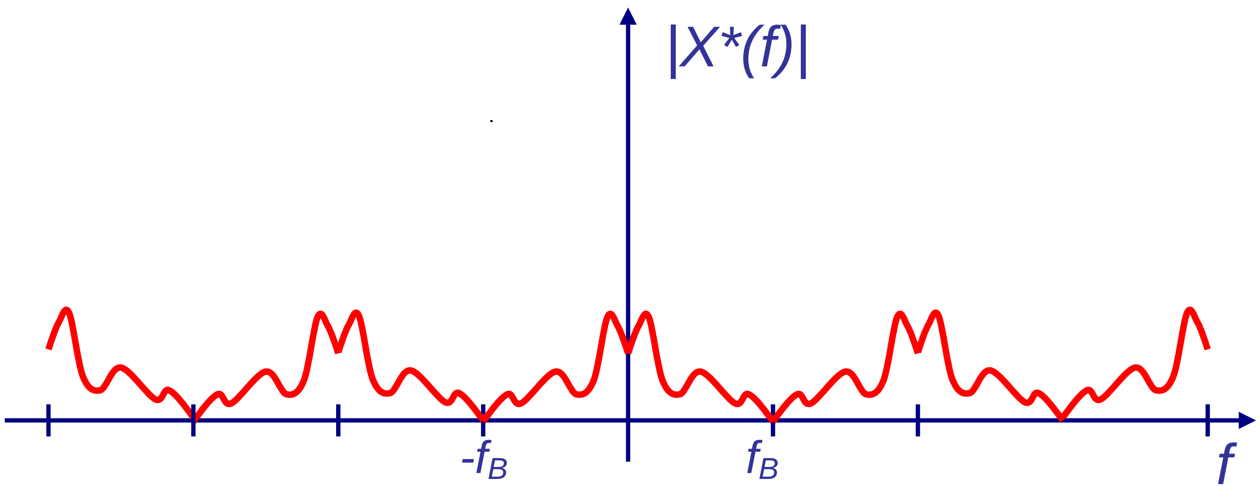
Sávkorlátozott jel — a Fourier-transzformált

- véges kiterjedésű, a $[-f_B, f_B]$ intervallumon kívül azonosan 0,
- matematikailag véges tartójú függvény, a tartó $(-f_B, f_B)$,
- a jelben nem fordul elő f_B frekvenciájúnál gyorsabb változás,

ahol f_B a sávkorlát frekvencia.

A mintavételezés törvényszerűségei

Sávkorlátozott jel – a mintavételezett jel Fourier-transzformáltja:



A mintavételi periódus:

$$T = \frac{2\pi}{f_B}$$

A mintavételezés periodizálja a Fourier-transzformáltat.

A mintavételi tétel

Az állítás precíz megfogalmazása (Shannon):

Tétel

Ha az $L^2(\mathbb{R})$-beli $x(t)$ függvény Fourier-transzformáltja véges tartójú, azaz létezik egy $\Omega > 0$ érték, amelyre $\hat{x}(\omega) \equiv 0$ ha $|\omega| > \Omega$, akkor

1. *az $x(t)$ folytonos mindenütt $\mathbb{R}$-ben,*
2. *az $x(t)$ függvény pontosan visszaállítható T periódussal egyenletesen vett mintapontjaiból, ahol*

$$0 < T \leq \frac{\pi}{\Omega},$$

a következő formulával:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left[\Omega(t-kT)\right]}{\Omega(t-kT)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

A tétel egzakt rekonstrukciós formulát is ad.

A mintavételi tétel - megjegyzések

A mintavételi tétel az $L^2(\mathbb{R})$ térbe tartozó, azaz energiakorlátos jelekre mondja ki állítását.

A tétel első fele arra a tényre utal, hogy a sávkorlátosság összefügg a folytonossággal, ugyanis egy "ugrás" a függvényben végtelen nagy sebességű változásnak felel meg.

A sávkorlátra vonatkozó feltételt a körfrekvencia helyett frekvenciában kifejezve :

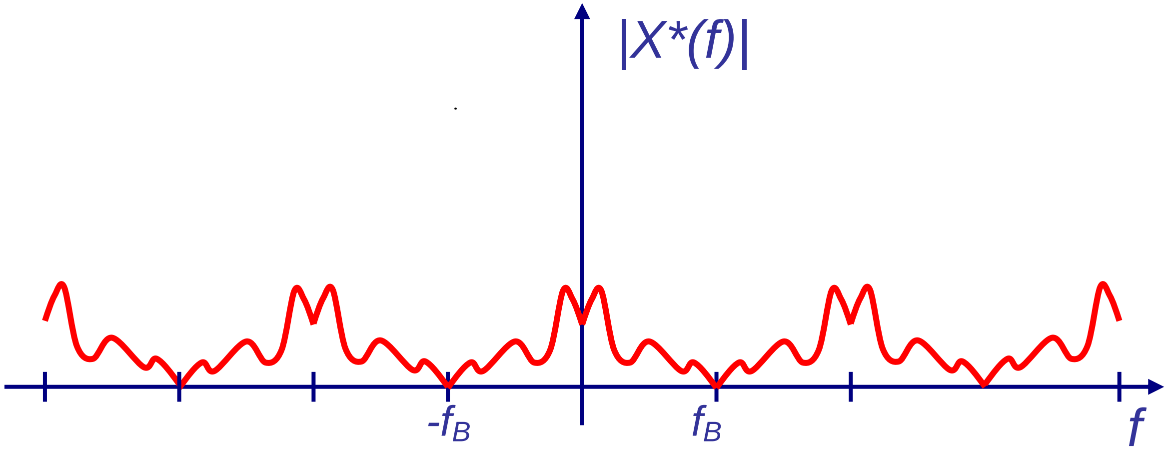
$$0 < T \leq \frac{1}{2f_B}$$

A mintavételi periódus helyett $f_S = 1/T$ mintavételi frekvenciát véve:

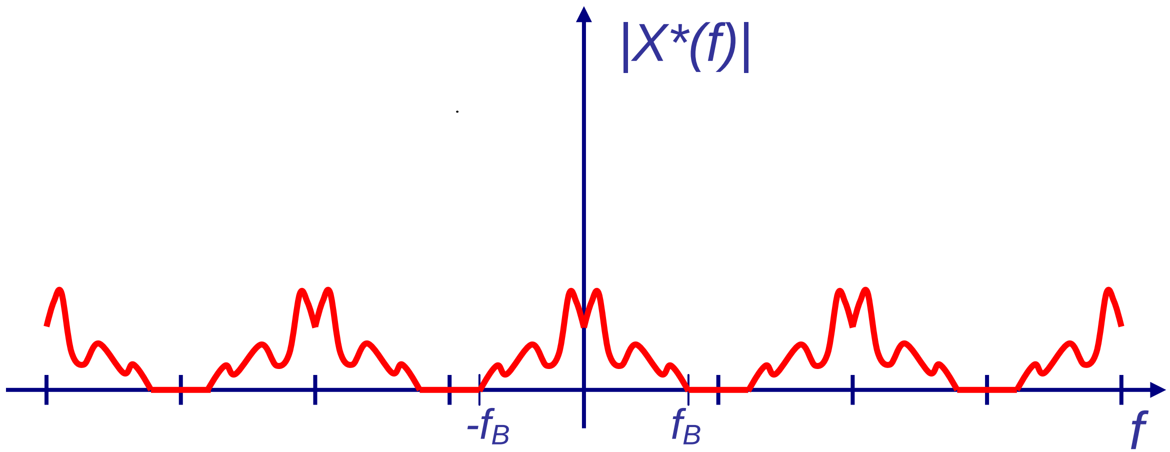
$$f_S \geq 2f_B$$

Tehát információveszteségtől mentes mintavételhez a mintavételi frekvenciának legalább *kétszer nagyobbnak* kell lennie, mint a jelben előforduló leggyorsabb változásnak megfelelő frekvencia, azaz a sávkorlát.

A mintavételezés törvényszerűségei



$$f_S = 2f_B$$



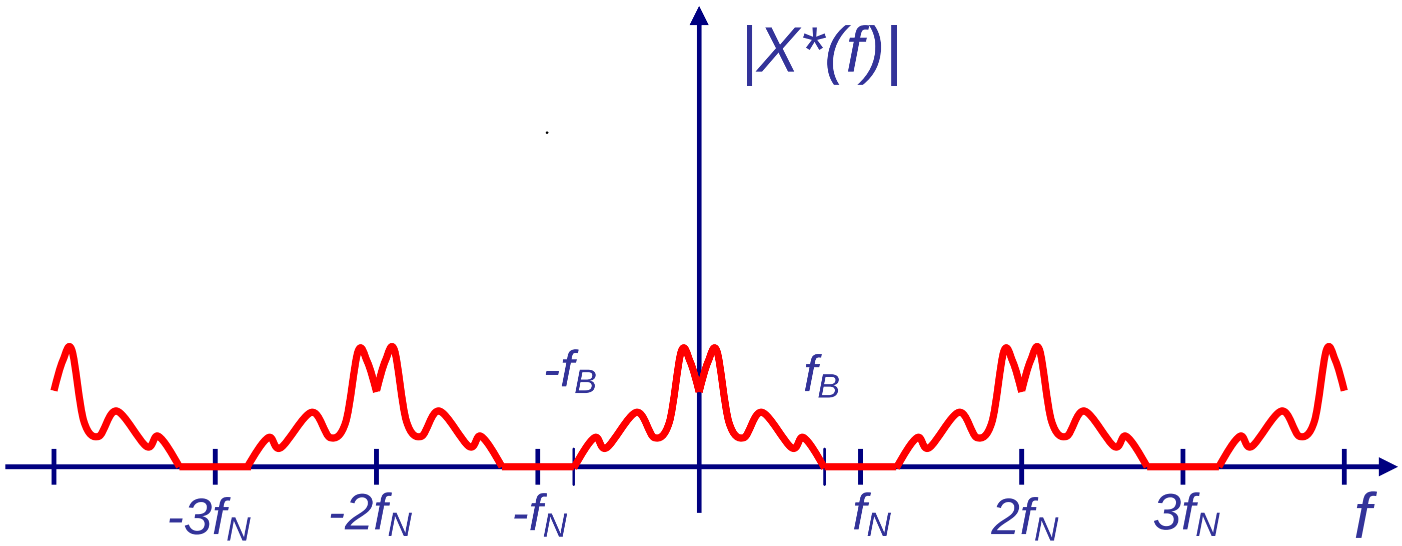
$$f_S > 2f_B$$

A mintavételezés törvényszerűségei

A Nyquist frekvencia: $f_N = \frac{f_S}{2}$

$[-f_N, f_N]$ a mintavételezett jel spektrumának alapperiódusa.

A mintavételi törvény szerinti feltételt a Nyquist frekvenciával kifejezve: $f_N \geq f_B$



A mintavételi törvénynek megfelelő mintavétel esetén:

A mintavételezett jel Fourier-transzformáltjának alapperiódusa megegyezik s ez eredeti jel Fourier-transzformáltjának $[-f_N, f_N]$ intervallumba eső szakaszával.

A mintavételezésből eredő hibák

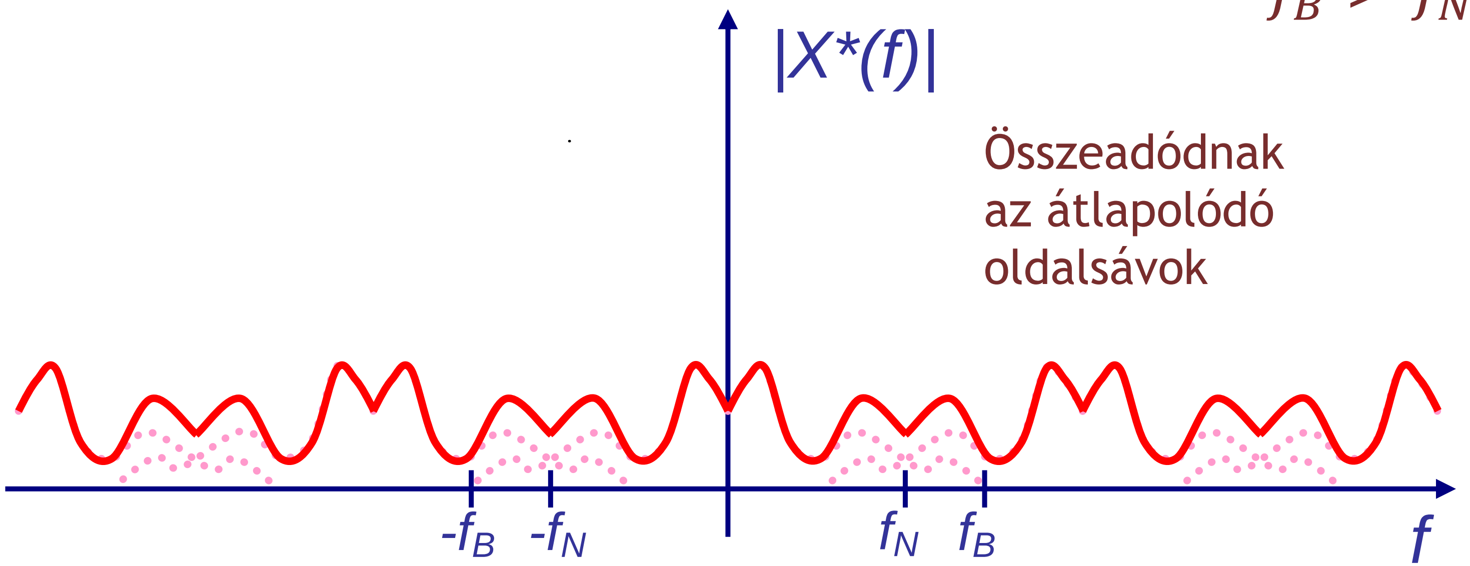
Amennyiben a mintavételi törvény sérül:

- A mintavétel információveszteséget eredményez, torzítás lép fel.
- A spektrumokban ez átlapolódáshoz vezet, nem csak a meglevő spektrális komponensek torzulása, hanem új, parazita komponensek megjelenése következik be.
- Egy adott mintavételi sorozatból nem egyértelműen állítható elő az eredeti jel: alternatív rekonstrukciók (*alias* jelek) állíthatók elő: *aliasing* hiba.

A mintavételezésből eredő hibák

Átlapolódás, parazita komponensek megjelenése:

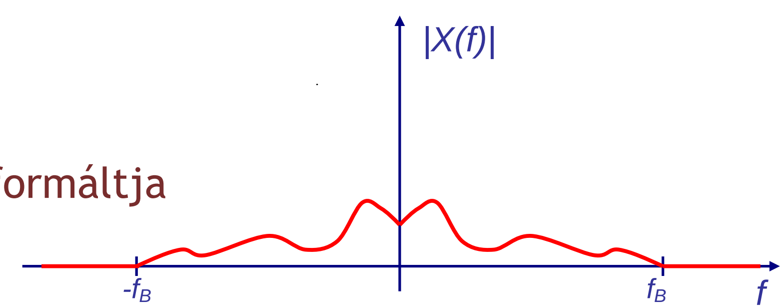
$f_B > f_N$



Összeadódnak az átlapolódó oldalsávok

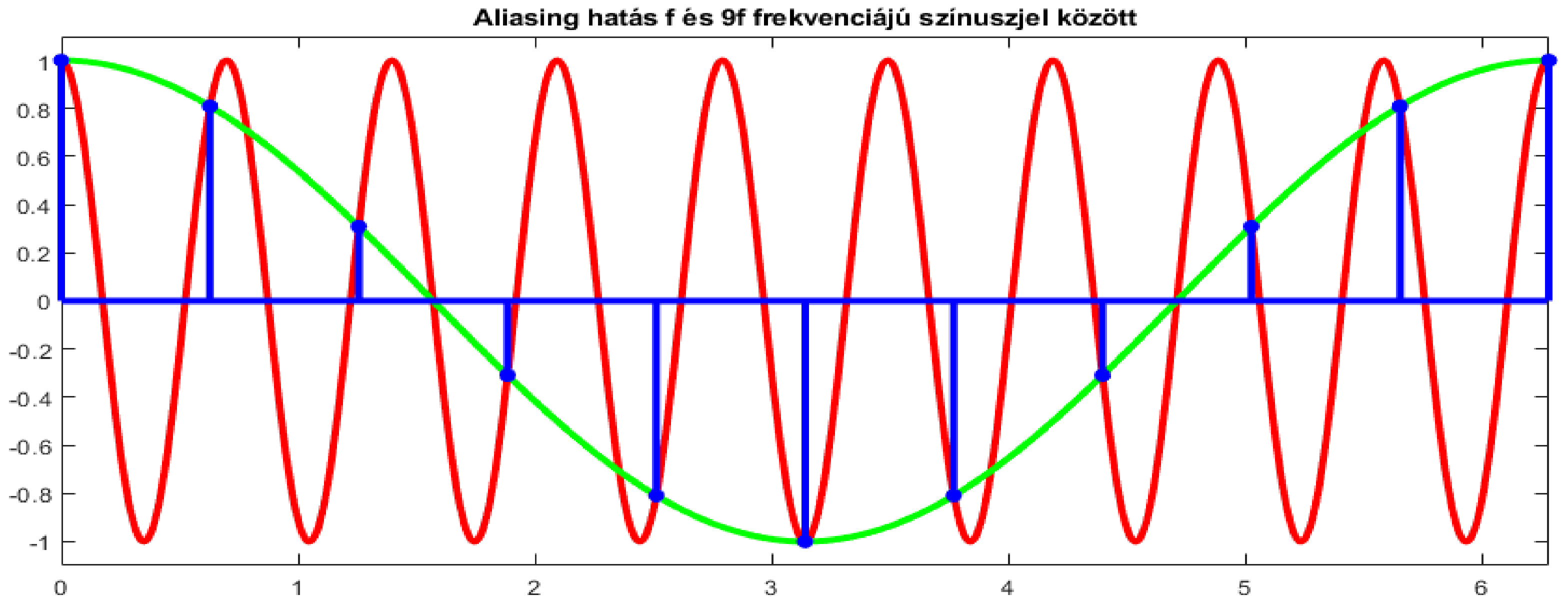
Emlékeztetőül:

Az eredeti jel Fourier-transzformáltja



A mintavételezésből eredő hibák

Aliasing hiba: (egy példa)

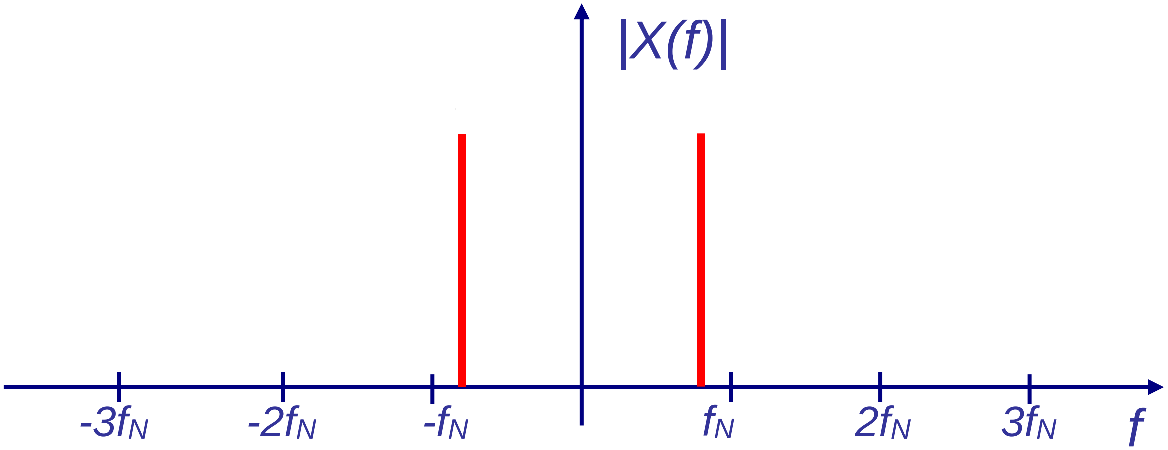


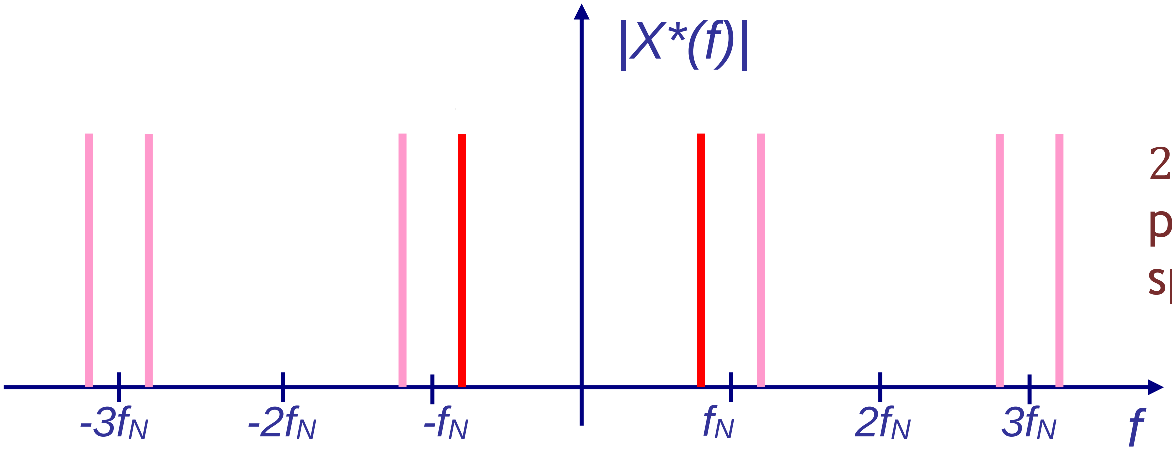
Két szinuszjel látható: frekvenciáik $f_1 = f$ és $f_2 = 9f$, a mintavételi frekvencia $f_s = 10f$, a két jelnek azonosak a mintapontjai, tehát bármelyik jel rekonstruálható belőlük.

A mintavételi törvényt a magasabb frekvenciájú szinuszjelnél sértjük meg. Ha kizárjuk a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket, akkor csak a kisebb frekvenciájú komponenst tudjuk helyreállíani a mintákból.

A mintavételezésből eredő hibák

f_0 frekvenciájú szinusz, hibátlan mintavételezés: $f_0 < f_N$



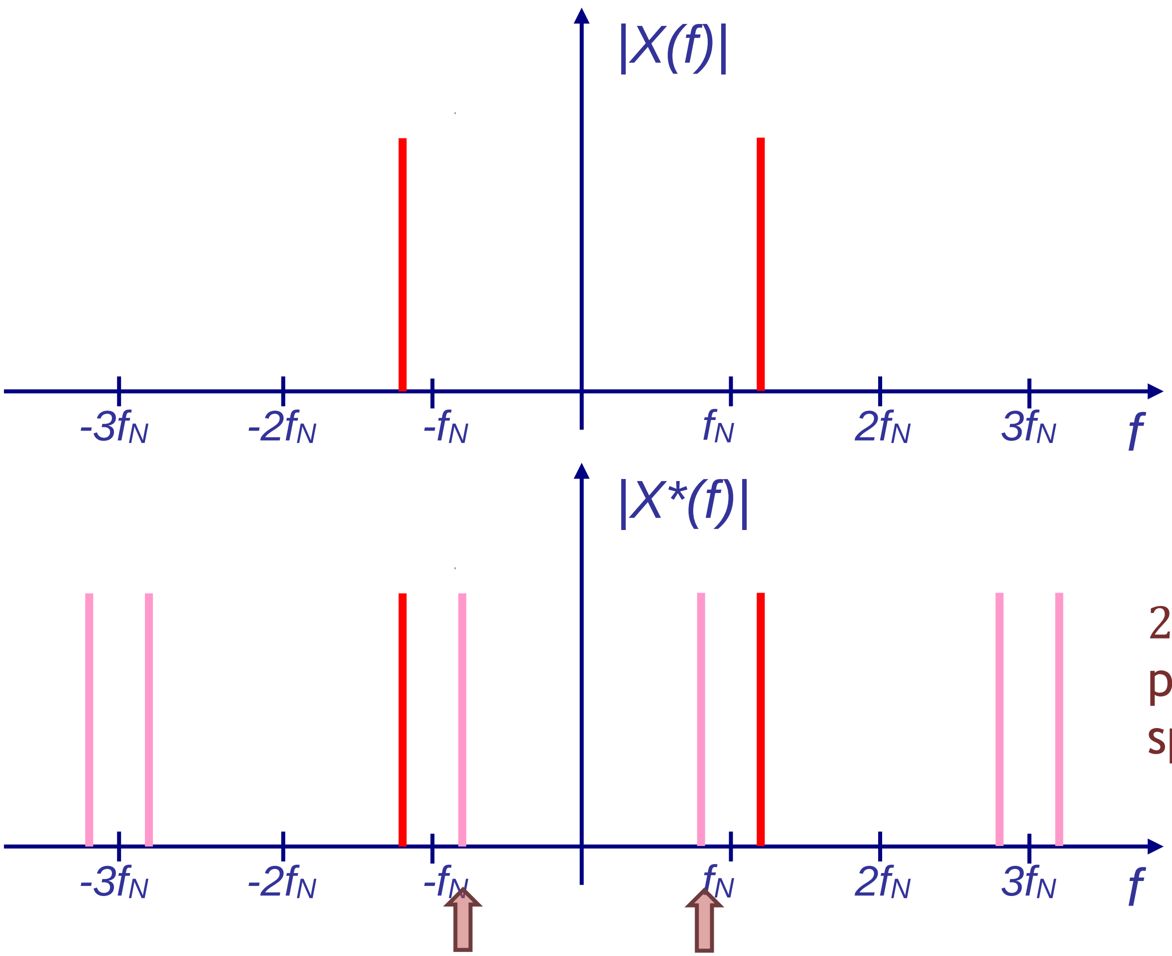


$2f_N$ szerint periodizálódott spektrum

Nincs átlapolódás — torzításmentes alapsáv.

A mintavételezésből eredő hibák

f_0 frekvenciájú szinusz, hibás mintavételezés: $f_0 > f_N$



$2f_N$ szerint periodizálódott spektrum

Átlapolódás — az alapsávban megjelent egy extra komponens.

A mintavételi hibák elkerülése

A mintavételi hibák kiküszöbölése:

- A mintavételi frekvencia helyes megválasztása – a jel sávkorlátjának megfelelően

  A mintavételi frekvencia növelésének korlátai:

  - Realizálási korlátok, költségesebb realizációk
  - Nagyobb tömegű adatmennyiség

- A jel sávkorlátozottá tétele – aluláteresztő (LP) szűrés.

  Adott $f_c = f_B$ vágási frekvenciájú LP szűrés – „anti-aliasing" szűrő

  Az anti-aliasing szűrés problémái:

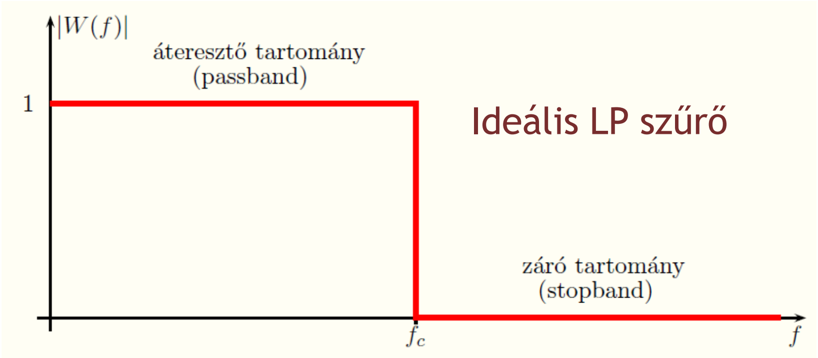
  - Adott esetben információvesztés állhat elő
  - Analóg szűrés: jó minőségben költséges realizációk

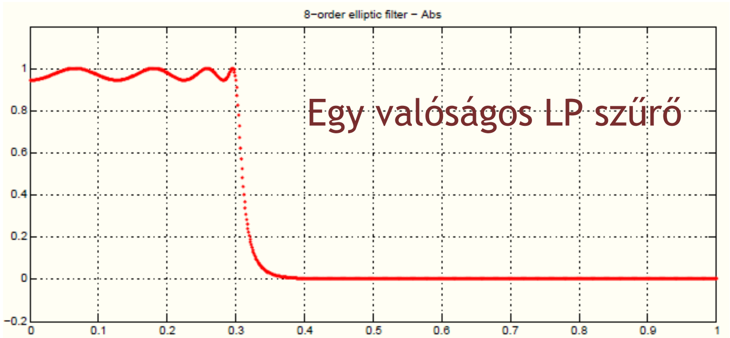
A mintavételi hibák elkerülése

Anti-aliasing szűrés:

A jelből kiszűrjük a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú komponenseket.

Ezt egy analóg aluláteresztő (Low Pass – LP) szűrővel valósíthatjuk meg.

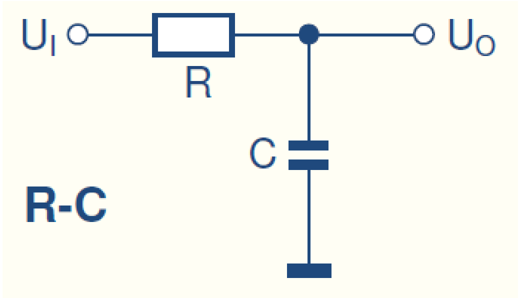


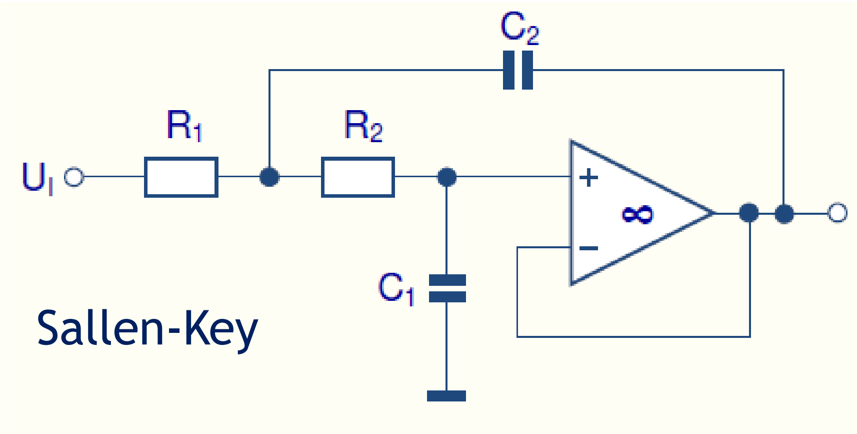


A szűrő sarokponti frekvenciáját a mintavételi frekvencia felénél (a Nyquist-frekvenciánál) kisebbre kell venni a véges meredekségből eredő hiba csökkentésére.

A mintavételi hibák elkerülése

Egyszerű LP szűrők:





A gyakorlatban nagyobb fokszámú (5-8) Butterworth, Csebisev, inverz Csebisev vagy Cauer (elliptikus) architektúrájú aktív RC szűrőket használunk.

Nagy frekvenciákon (RF) passzív LRC szűrőket és speciális szűrő áramköröket (pl. SAW – Surface Acoustic Wave filter) alkalmazunk.

A mintavételi törvény

Az információveszteség nélküli mintavétel megvalósításának szabályai (gyakorlati megközelítés):

- A jel véges (korlátos) energiatartalmú.
- A jel sávkorlátozott, azaz nem tartalmaz egy f_B sávkorlátnál nagyobb frekvenciájú komponenseket.
- Az f_S mintavételi frekvencia legalább kétszerese a sávkorlátnak, azaz $f_S \geq 2f_B$.

A mintavételi törvény megadja a jel mintaértékeiből való rekonstruálásának elvi formuláját is:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-kT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} \qquad T = \frac{1}{f_S}$$

(ez a gyakorlatban természetesen csak közelítőleg számítható ki)

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros

email: soumelidis@sztaki.hu