

ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK I.

8. A JELFELDOLGOZÁS ALAPJAI



Dr. Soumelidis Alexandros

2018.11.22.



BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

A Fourier transzformáció

Egy $x(t) \in L^1$ jel Fourier-transzformáltja

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad \omega = 2\pi f \quad \text{körfrekvencia}$$

A Fourier-transzformáció a Plancherel-féle elmélet értelmében kiterjeszthető $x(t) \in L^2$ jelekre.

Ennek megfelelően:

az $x(t) \in L^2$ Fourier-transzformáltja egy $X(\omega) \in L^2$ függvény.

létezik inverz transzformáció:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



A Fourier transzformáció tulajdonságai

Bizonyítás nélkül felsoroljuk a Fourier transzformáció néhány fontosabb tulajdonságát (a Fourier transzformációra vonatkozó fontosabb tételt).

Az f függvény Fourier transzformáltja $F(\omega) \rightarrow 0$, ha $\omega \rightarrow +\infty$ vagy $-\infty$.
(Riemann-Lebesgue lemma)

Az f függvény $F(\omega)$ Fourier transzformáltja egyenletesen folytonos \mathbb{R} -ben.

Ha f függvény és f' deriváltja létezik, és mindkettő $L^1(\mathbb{R})$ vagy $L^2(\mathbb{R})$ térbe tartozó függvény, akkor

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Eltolás időtartományban:

$$\mathcal{F}\{f(t - T)\} = e^{-i\omega T}\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Eltolás frekvenciatartományban:

$$F(\omega - \Omega) = \mathcal{F}\{f(t)e^{i\Omega t}\}.$$

(időtartományban moduláció - sin/cos-szal szorzás)



A konvolúció

Definíció:

f és g $L^1(\mathbb{R})$ térhez tartozó függvények *konvolúcióján* a következő h függvényt értjük:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

A konvolúció műveletére igaz:

- Kommutativitás – $f * g = g * f$
- Asszociativitás – $(f * g) * e = f * (g * e)$

Kérdés: létezik egységelem? Azaz létezik-e $d \in L^1(\mathbb{R})$, hogy

$$f * d = f \quad (f \in L^1(\mathbb{R}))$$

Absztrakt módon kifejezve: az $L^1(\mathbb{R})$ tér elemei vajon csoportot alkotnak-e a konvolúció műveletére nézve?



A konvolúció

A válasz: **nem!**

Nem létezik ilyen $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény, sőt egyáltalán nem létezik ilyen függvény. Azaz a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau = f(t)$$

formulát egyetlen egy h függvény sem elégíti ki.

A $\delta(t)$ Dirac-delta (δ -disztribúció) bevezetésével formálisan igaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t)$$

Azaz a $\delta(t)$ Dirac-delta a konvolúcióra nézve egységelem, de nem eleme a térnek - sőt, nem is függvény.



A Dirac-delta

Néhány formális definíció / összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) d\tau = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

$\delta(t)$ Fourier transzformáltja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega)$$

az $\equiv 1$ függvény Fourier transzformáltja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t)$$



A Dirac-delta

Néhány formális definíció / összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) d\tau = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

$\delta(t)$ Fourier transzformáltja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t)$$



A Dirac-delta

A Fourier transzformáció eltolási tétele alapján:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\Omega t}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} = \cos \Omega t$$

Így a *cos* ill. *sin* függvény Fourier transzformáltja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \Omega t e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \Omega t e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2i} [\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)]$$



A konvolúció Fourier transzformáltja

Tétel:

Legyen f, g az $L^1(\mathbb{R})$ térbe tartozó függvények, és jelöljük a Fourier transzformáltjaikat $\widehat{(\cdot)}$ -vel. Ekkor

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Tehát a konvolúció szorzásba megy át:

konvolúció $\xrightarrow{\mathcal{F}\{.\}}$ szorzás

Bizonyítás:

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i\omega t} dt g(\tau)d\tau =$$

felcseréljük az integrálások sorrendjét - Fubini tétele / eltolt Fourier transzformált

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega\tau} g(\tau)d\tau = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$$



$L^2(\mathbb{R})$ jelek Fourier transzformáltja

Legyen f az $L^2(\mathbb{R})$ térbe tartozó függvény, ennek közelítése $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvényekkel:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{ha } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$f_T(t)$: kivágjuk $f(t)$ egy T szélességű darabját, tetszőleges T mellett ez $L^1(\mathbb{R})$ -beli függvény, illetve

$$f_T(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

Definiáljuk a $w_T(t)$ függvényt - négyszögletes ablakfüggvény vagy karakterisztikus függvény:

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_T(t) = f(t)w_T(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{w}_T(\omega)$$

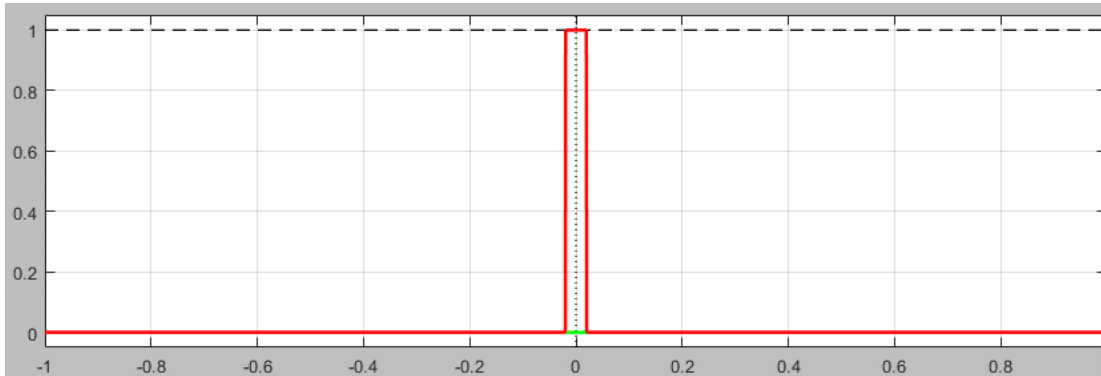
↑
konvolúció

\hat{w}_T közelítő konvolúciós egységelem



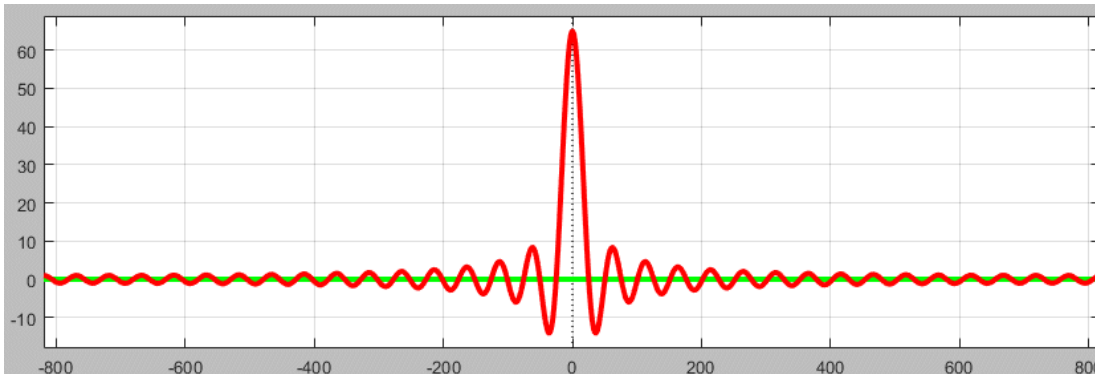
$L^2(\mathbb{R})$ jelek Fourier transzformáltja

\hat{w}_T közelítő konvolúciós egységelem a frekvenciatartományban:



$w_T(t)$

$$\hat{w}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{i\omega} = T \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}}$$



T növekedésével ez egy egyre csúcsosodó és egyre keskenyedő pulzus,

határértékben $\rightarrow \delta(\omega)$



$L^2(\mathbb{R})$ jelek Fourier transzformáltja

Ha $T \rightarrow \infty$, akkor bizonyos értelemben vett határátmenettel (Cauchy)

$$f_T(t) \rightarrow f(t) \quad \text{és} \quad \hat{f}_T(\omega) \rightarrow \hat{f}(\omega)$$

Ilyen módon határátmenetként értelmezhető az $L^2(\mathbb{R})$ térhez tartozó függvények Fourier transzformáltja.

Ennek precíz kifejtése a *Plancherel* elmélet (tétel).

Ennek értelmében a Fourier transzformáció

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

leképezés (operátor).

Inverze szintén

$$\mathcal{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$



A Parseval egyenlőség

Az $L^2(\mathbb{R})$ egy fontos tulajdonsága:

a Parseval egyenlőség vagy Plancherel formula.

Tétel:

Minden az $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ függvényre érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$\widehat{(\cdot)}$ jelöli a Fourier transzformáltat, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert térben definiált belső szorzatot:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

1 függvényre alkalmazva:

$$\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2$$

a normákra érvényes egyenlőség



Fourier transzformált: fizikai értelmezés

$x \in L^2(\mathbb{R})$ jel esetében

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \sim E$$

a jel által hordozott teljes energiával arányos mennyiség

A Parseval egyenlőség szerint (a Fourier transzformált $X(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \sim E$$

Egy ω_0 körfrekvencia körüli $\Delta\omega$ szélességű sávban képviselt energia

$$E_0 \sim \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} |X(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow$$

$|X(\omega)|^2$, azaz egy jel Fourier transzformáltjának négyzete
energiasűrűség függvény



APSD: fizikai értelmezés

Sztochasztikus jelek spektrális leírása az autokorreláció (kovariancia) függvény Fourier transzformáltján alapul.

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Stacionárius ergodik folyamatok esetén az autokorreláció függvény számítása – időátlag alapján:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt$$

Nézzük meg, mit jelent $\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega$ ill. $\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} G_x(\omega) d\omega$.



APSD: fizikai értelmezés

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right]_{\tau=0} = R_x(0)$$



inverz Fourier transzformáció

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$



Ez egy **teljesítmény** jellegű mennyiség – egységnyi időre eső energiamennyiség.

az $R_x(\tau)$ re vonatkozó formula szerint, ha $\tau = 0$



APSD: fizikai értelmezés

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = 2\pi R_x(0) \sim P$$

a jel által képviselt teljes
teljesítmény

$$P_0 \sim \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} G_x(\omega) d\omega$$

ω_0 körfrekvencia körüli $\Delta\omega$
szélességű sávban képviselt
teljesítmény

$G_x(\omega)$ **teljesítménysűrűség függvény**

$G_x(\omega)$ -t tehát jogosan nevezzük az x jel auto-teljesítménysűrűség
(APSD – Auto Power Spectral Density) függvényének



Becslések

Jelek paramétereinek meghatározása:

- Pontosán általában nem határozhatók meg, a jelfeldolgozási módszerek általában **hibával** terheltek.
- A jelfeldolgozási módszerek általában **becslések**.
- A hibák okai (a teljesség igénye nélkül): sztochasztikus jelleg, zajok, véges mintaregisztrátum, véges számábrázolási pontosság

x – valóságos érték

\hat{x} – becsült érték

Az eltérés kifejezése:

$$\Delta x = x - \hat{x}$$

egyszerű különbség

$$|\Delta x| = |x - \hat{x}|$$

abszolút hiba

$$MSE[\hat{x}] = E[(x - \hat{x})^2]$$

négyzetes középhiba



A becslések hibái

A négyzetes középhiba (Mean-Square Error):

$$MSE[\hat{x}] = E[(x - \hat{x})^2]$$

A becsült érték általában ismeretlen hibával terhelt –
valószínűségi változónak tekinthető.

A négyzetes középhiba alkalmazásának indokai:

- Igen régi fogalom: a "legkisebb négyzetek" (Least Square - LS) elve – Carl Friedrich Gauss (XVIII-XIX. század).
- Az átlagos négyzetes eltérés energia jellegű mennyiség, közel áll az L^2 normához. Az L^2 -térbeli skaláris szorzat révén definiálható a merőlegesség fogalma.
- A négyzetes kifejezésekkel egyszerű számolni – folytonos differenciálhatóság, optimalizálás.



A becslések hibái

A becslés négyzetes középhibája:

$$MSE[\hat{x}] = E[(x - \hat{x})^2] = E[(x - E[\hat{x}] + E[\hat{x}] - \hat{x})^2] =$$

Elvégezzük a négyzetre emelést és tagonként képezünk $E[.]$ -t:

$$= E[(x - E[\hat{x}])^2] + 2E[(x - E[\hat{x}])(E[\hat{x}] - \hat{x})] + E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]$$

A középső tag:

$$\begin{aligned} E[(x - E[\hat{x}])(E[\hat{x}] - \hat{x})] &= E[xE[\hat{x}] - E[\hat{x}]E[\hat{x}] - x\hat{x} + E[\hat{x}]\hat{x}] = \\ &= E[x]E[\hat{x}] - \cancel{E[\hat{x}]E[\hat{x}]} - E[x\hat{x}] + \cancel{E[\hat{x}]\hat{x}} = E[x]E[\hat{x}] - E[x\hat{x}] \end{aligned}$$

A becsült érték statisztikailag *független* az eredeti értéktől, így

$$E[x\hat{x}] = E[x]E[\hat{x}] \quad \Rightarrow \quad \text{a középső tag 0.}$$



A becslések hibái

Tehát

$$MSE[\hat{x}] = \underbrace{E[(x - E[\hat{x}])^2]}_{\text{torzítás (bias)}} + \underbrace{E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]}_{\text{variancia}}$$

A becsült érték várható értékének eltérése a valóságostól:

torzítás (bias)

A becsült érték eltérése saját várható értékétől:

variancia

A négyzetes középhiba felbontása:

$$\begin{aligned} MSE[\hat{x}] &= b^2[\hat{x}] + var[\hat{x}] \\ &= b^2[\hat{x}] + \sigma^2[\hat{x}] \end{aligned}$$

torzítási hiba és variancia hiba összege.

A négyzetgyöke: RMS (Root Mean Square)

$$RMS[\hat{x}] = \sqrt{b^2[\hat{x}] + var[\hat{x}]}$$



A becslések hibái

Torzítás

$$b[\hat{x}] = \sqrt{E[(x - E[\hat{x}])^2]} + E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]$$

A hiba determinisztikus része, azonos feltételek mellett mindig ugyanaz:

- Ha nagysága ismert: rendszeres hiba - korigálni lehet.
- Sok esetben nem ismert: ismeretlen feltételek, tekintetbe nem vett (nem modellezett) hatások eredményeként keletkezik.

Variancia ill. szórás

$$\sigma[\hat{x}] = \sqrt{E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]} \quad \text{var}[\hat{x}] = E[(E[\hat{x}] - \hat{x})^2]$$

A hiba véletlen komponense, a becslés minden realizációjában különböző.



A becslések tulajdonságai

A becslések jóságát kifejező jellemzők

Torzítatlan (unbiased) becslés $E[\hat{x}] = x$

Hatásosság (efficiency) Legyen \hat{x}_1 és \hat{x}_2 két becslése x paraméternek.
 \hat{x}_1 hatásosabb becslés mint \hat{x}_2 , ha

$$E[(\hat{x}_1 - x)^2] < E[(\hat{x}_2 - x)^2]$$

Konzisztencia Egy becslés konzisztens, ha N mintaterjedelmet tekintve

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{x} - x| > \varepsilon] = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

Tehát egy becslés konzisztens, ha növekvő mintanagyságra a hiba 0-tól való eltérésének valószínűsége egyre kisebb (erős konzisztencia).



Becslési eljárások: középérték és variancia

Jel középértékének becslése véges N mintaterjedelmre:

$$\bar{x} = E[x] \qquad \hat{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Konzisztencia \leftarrow a központi határeloszlás tételek alkalmazásával.

Jel varianciájának becslése véges N mintaterjedelmre:

$$\text{var}[x] = \sigma_x^2 = E[(x - E[x])^2] \qquad \widehat{\text{var}}[x] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Konzisztencia \leftarrow a központi határeloszlás tételek alkalmazásával.

Probléma: a középérték egzakt módon általában nem áll rendelkezésre.



Becslési eljárások: középérték és variancia

Ha a középértéket torzítatlan becslésével vesszük figyelembe:

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(x_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \quad E[s_x^2] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \left[\left(x_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right]$$

Vezessük be a következő jelölést: $x = \tilde{x} + \bar{x}$, ahol \bar{x} a középérték.

$$\begin{aligned} E[s_x^2] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \left[\left(\tilde{x}_k + \bar{x} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\tilde{x}_j + \bar{x}) \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \left[\left(\tilde{x}_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{x}_j \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ E[\tilde{x}_k^2] - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N E[\tilde{x}_k \tilde{x}_j] + \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j] \right\} \end{aligned}$$

A mérési adatok függetlensége miatt $E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j] = \delta_{ij} \sigma_x^2$,

ahol δ_{ij} a Kronecker szimbólum:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Becslési eljárások: középérték és variancia

Tehát

$$E[s_x^2] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_x^2 \left\{ 1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N} \right\} = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2$$

ami egy *torzított* becslése a varianciának.

Torzítás: ismert rendszeres hiba – korrigálható, $\frac{N}{N-1}$ -szeresét véve.

A minta-variancia empirikus becslése véges N mintaterjedelemben:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{x})^2, \text{ ahol } \hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

Ez már torzítatlan (és konzisztens) becslés.



Becslési eljárások: korreláció-függvények

Autokorreláció függvény becslése:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad \widehat{R}_x(k) = \frac{1}{N - k} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Az autokorreláció függvény páros, így

$$\widehat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{j=1}^{N-|k|} x_j x_{j+|k|}$$

alakban is kifejezhető, így elegendő a függvényt $k \geq 0$ indexekre kiszámolni.

Egy torzított, de a gyakorlat számára jelentős becslés:

$$\widehat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-|k|} x_j x_{j+|k|} \quad E[\widehat{R}_x(|k|)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_x(k)$$

háromszögletű „ablakkal” szorzott alak **27**



Becslési eljárások: korreláció-függvények

Autokovariancia függvény becslése:

$$C_x(\tau) = E[(x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x})]$$

$$\widehat{C}_x(|k|) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{j=1}^{N-|k|} (x_j - \widehat{\bar{x}})(x_{j+|k|} - \widehat{\bar{x}})$$

Torzítatlan konzisztens becslés. Hasonlóan egy hasznos torzított becslés:

$$\widehat{C}_x(|k|) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-|k|} (x_j - \widehat{\bar{x}})(x_{j+|k|} - \widehat{\bar{x}})$$

$$E[\widehat{C}_x(|k|)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) C_x(k) \quad \text{háromszögletű „ablakkal” szorzott alak}$$



Becslési eljárások: korreláció-függvények

Kereszt-kovariancia függvény becslése: $2N + 1$ mintaterjedelemre

$$C_{xx}(\tau) = E[(x(t) - \bar{x})(y(t + \tau) - \bar{y})]$$

$$\widehat{C}_{xy}(|k|) = \frac{1}{2N - k + 1} \sum_{j=-N+k}^{N-k} (x_j - \widehat{\bar{x}})(y_{j+k} - \widehat{\bar{y}})$$

Nem páros függvény! Torzítatlan konzisztens becslés.

Hasonlóan az előzőkhöz értelmezhető a keresztkorreláció becslés, ill. a háromszögletű ablakkal torzított becslés is.



Becslési eljárások: korreláció-függvények

A korreláció-becslésekről általában:

$$\frac{1}{N - |k|} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+|k|}$$

Igen munkaigényes eljárások, N^2 -tel arányos számú összeadást és szorzást igényelnek.

A gyakorlatban inkább kerüljük a kiszámításukat.

A gyakorlatban inkább megvalósítható eljárás: az FFT alapú spektrumanalízisen keresztül – lásd később.



A diszkrét Fourier transzformáció

Kiindulás:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

1.lépés: véges mintaregisztrátum – T időtartam

$$X(f) \cong \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

2.lépés: mintavétel Δt periódussal, legyen $T = n\Delta t$

$$X(f) \cong \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} x(j\Delta t)e^{-i2\pi fj\Delta t}$$

Az integrálást véges szummával helyettesítjük.



A diszkrét Fourier transzformáció

3. lépés: frekvenciában is mintavételezünk – $[-f_N, f_N]$ tartományban N minta

A véges Fourier transzformált periodikus: az $[-f_N, f_N]$ tartomány egy periódusnak felel meg, f_N a Nyquist frekvencia.

$$\Delta f = 2 \frac{f_N}{N} \quad 2f_N \Delta f = 1 \quad 2f_N = \frac{1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{N \Delta t}$$

A diszkrét frekvencia- ill. időpontokra alkalmazzuk a $f_k = k \Delta f$ és a $t_k = j \Delta t$ jelöléseket:

$$X(f_k) = \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} x(t_j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad \left(k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right)$$

Ezt a formát nevezzük **diszkrét Fourier transzformáltnak (DFT)**.



A diszkrét Fourier transzformáció

A gyakorlatban $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ indexelést alkalmazunk, ekkor

$$X_k = \Delta t \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} x_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad \ell = j + N/2 \text{ helyettesítéssel}$$

$$\begin{aligned} X_k &= \Delta t \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{\ell-N/2} e^{-i2\pi \frac{(\ell-N/2)k}{N}} = \\ &= e^{-i2\pi \frac{k}{2}} \Delta t \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{\ell-N/2} e^{-i2\pi \frac{\ell k}{N}} \end{aligned}$$

Ez egyenértékű $N/2$ mintával való időtartománybeli eltolással, ill. a kiszámított spektrum jobb- és baloldali felének felcserélésével.



A gyors Fourier transzformáció

A diszkrét Fourier transzformáció

$$X_k = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

kiszámítása N^2 műveletet (szorzás-összeadás együttese) igényel.

Bizonyos szimmetriák figyelembevételével ez $N \log_2 N$ műveletre redukálható:

gyors Fourier transzformáció

Fast Fourier Transform (FFT)



A gyors Fourier transzformáció

Gyorsítás: a műveletek számának csökkentése – FFT algoritmus

Történelem: a köztudat szerint **J.W. Cooley** és **J.W. Tukey** dolgozta ki első formáját **1965**-ben,

azonban kiderült hogy **Carl Friedrich Gauss** már **1805** környékén alkalmazott hasonló elvek alapján működő algoritmust.

Cooley–Tukey algoritmus:

„oszd meg és uralkodj” elv – kisebb egységekre osztjuk a számítandókat és a közös részeket figyelembe véve csökkenthető a számításigény.



A gyors Fourier transzformáció

A Cooley–Tukey-féle FFT algoritmust a XX. Század 10 legjelentősebb algoritmusai közé választották.

(Computing in Science and Engineering, 2000)



James Cooley

1965: James Cooley of the IBM T.J. Watson Research Center and John Tukey of Princeton University and AT&T Bell Laboratories unveil the **fast Fourier transform**.

Easily the most far-reaching algorithm in applied mathematics, the FFT revolutionized signal processing. The underlying idea goes back to Gauss (who needed to calculate orbits of asteroids), but it was the Cooley–Tukey paper that made it clear how easily Fourier transforms can be computed. Like Quicksort, the FFT relies on a divide-and-conquer strategy to reduce an ostensibly $O(N^2)$ chore to an $O(N \log N)$ frolic. But unlike Quicksort, the implementation is (at first sight) nonintuitive and less than straightforward. This in itself gave computer science an impetus to investigate the inherent complexity of computational problems and algorithms.



John Tukey



A gyors Fourier transzformáció

A legegyszerűbb esettel foglalkozunk (Cooley és Tukey eredetileg általánosabb esetet írt le).

Tegyük fel, hogy N 2 egész hatványa, azaz $N = 2^P$, ahol $P \in \mathbb{R}$.

Válasszuk szét a bemeneti adatokat két egyenlő részre – páros és páratlan indexű elemekre:

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2\ell} e^{-i\frac{2\pi}{N}(2\ell)n} + \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2\ell+1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(2\ell+1)n} \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2\ell} e^{-i\frac{2\pi}{N/2}\ell n}}_{\text{A páros indexű elemek } N/2\text{-méretű DFT-je}} + e^{-i\frac{2\pi}{N}n} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2\ell+1} e^{-i\frac{2\pi}{N/2}\ell n}}_{\text{A páratlan indexű elemek } N/2\text{-méretű DFT-je}} \end{aligned}$$

A páros indexű elemek
 $N/2$ -méretű DFT-je

A páratlan indexű elemek
 $N/2$ -méretű DFT-je



A gyors Fourier transzformáció

Jelöljük a páros ill. páratlan indexű elemekre vonatkozó DFT-eket az angol *even* és *odd* kifejezések alapján E_n -nel illetve O_n -nel, ezekkel

$$X_n = E_n + e^{-i\frac{2\pi}{N}n} O_n$$

Az $N/2$ méretű DFT a n indexben $N/2$ szerint periodikus sorozat, így elegendő az E_n és O_n tagokat $0 \leq n < N/2$ indexekre kiszámolni, mivel

$$E_{n+N/2} = E_n \quad O_{n+N/2} = O_n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$$

Ugyanakkor O_n tag szorzótényezőjére

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(n+\frac{N}{2}\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}n} e^{-i\pi} = -e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$$

érvényes.



A gyors Fourier transzformáció

Ezeknek megfelelően a DFT értéke $k = 0, 1, \dots, N - 1$ indexekre

$$X_n = \begin{cases} E_n + e^{-i\frac{2\pi}{N}n} O_n & \text{ha } 0 \leq n < N/2 \\ E_{n-N/2} + e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-\frac{N}{2})} O_{n-N/2} & \text{ha } N/2 \leq n < N \end{cases}$$

Kiszámításához N művelet szükséges.

Ha folytatjuk az eljárást: az $N/2$ méretű DFT-ket felosztjuk két $N/2$ méretű DFT-re – ezek számítására is N művelet szükséges.

Iteratívan folytatjuk az eljárást az egyedi elemek szintjéig: minden szint számítása N műveletet igényel. A szintek száma $\log_2 N$.

Az igényelt összes művelet száma:

(szintek száma) \times (az egy szinten elvégzendő műveletek száma)

$$N \times \log_2 N$$



A gyors Fourier transzformáció

A gyors Fourier transzformáció (FFT) megvalósításához szükséges műveletek száma

$$N \times \log_2 N$$

Az ismertetett eljárást – az alkalmazott felezési stratégia miatt – **Radix-2** eljárásnak nevezzük

Radix: a felosztás rendje – jelen esetben 2.

Nem ez a leghatékonyabban realizálható eljárás:

- A Radix-4 algoritmus – 4 csoportba osztás szintenként,
- Változó alapú (mixed radix) algoritmusok

hatékonyabbak.

A mixed radix algoritmusok alkalmazhatók,
ha N nem egész hatványa 2-nek.

Vannak a Cooley-Tukey-től eltérő FFT algoritmusok:

pl. Winograd, Rader, Lánzos algoritmusai.



A gyors Fourier transzformáció

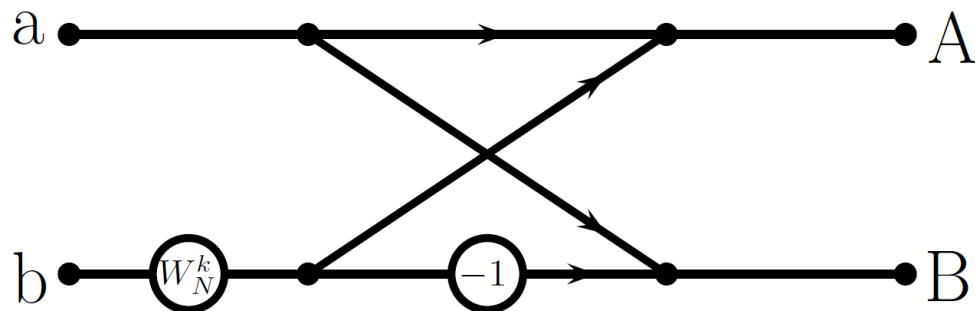
Az előzőkben bemutatott számítási sémában sűrűn előforduló forma:

$$A = a + W_N^n b$$

$$B = a - W_N^n b$$

ahol $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ az N -dik egységgyök.

Elnevezése: **butterfly** – pillangó



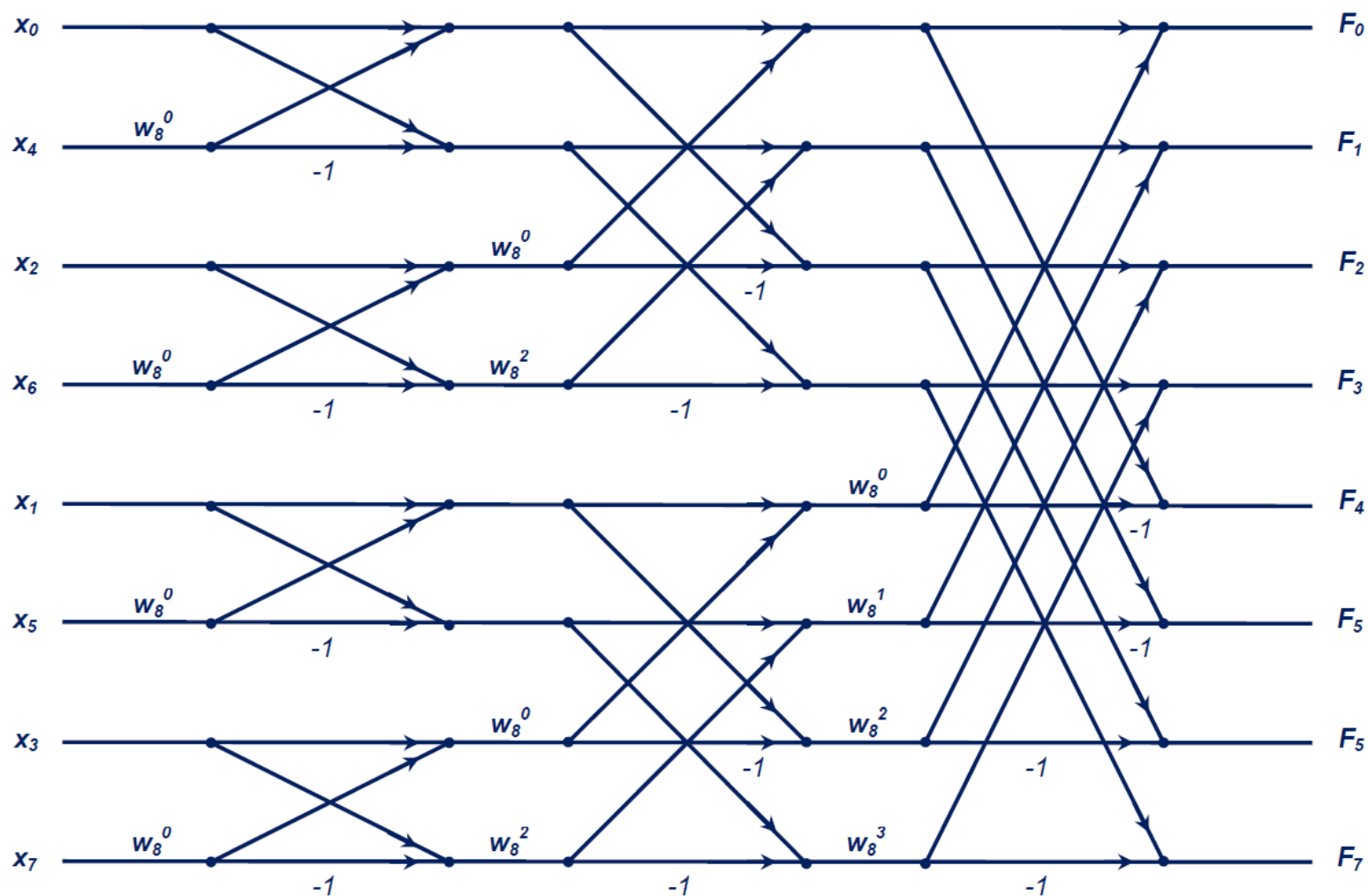
A W_N^n szorzót „twiddle” faktornak is nevezik.

twiddle – babrálni, bütykölni



A gyors Fourier transzformáció

Egy 8-pontos FFT – Radix-2, Decimation-In-Time (DIT) séma



Spektrumbecslési eljárások

Az auto-teljesítménysűrűség függvény becslése

A definíció szerinti módszer

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad \text{ahol} \quad R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$$

Véges $2N$ mintaterjedelemben:

1. Az autokorreláció (autokovariancia) függvény becslése

$$\widehat{R}_x(|k|) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{j=1}^{N-|k|} x_j x_{j+|k|}$$

2. Diszkrét Fourier transzformáció végrehajtása – FFT

$$G_x(k) = \Delta t \sum_{j=-N}^{N-1} \widehat{R}_x(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad (k = -N, \dots, 0, \dots, N - 1)$$

Torzított, de konzisztens becslés.



Spektrumbecslési eljárások

A véges mintaregisztrátum hatása

Végtelen integrálási határok helyett a gyakorlatban:

$$G_x(f) = \int_{-T}^T R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(\tau) R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

$w_T(\tau)$ egy un. ablakfüggvény, nevezetesen egy négyszögletes ablakfüggvény:

- véges kiterjedésű (véges tartójú),
 - korlátos függvény.
- $$w_T(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -T \leq \tau < T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ablakfüggvénnyel való szorzás időtartományban \Rightarrow

konvolúció a Fourier transzformáltakra:

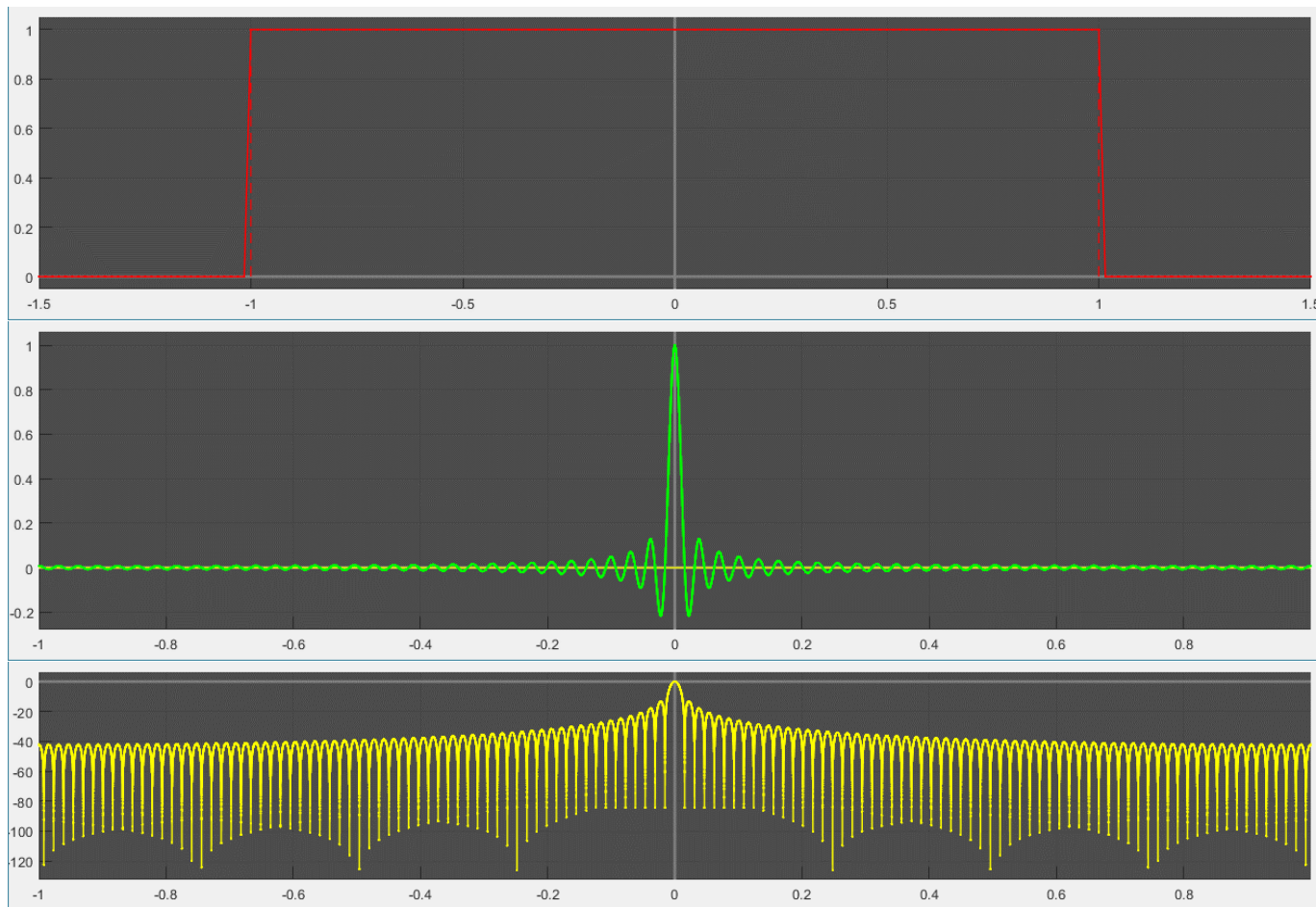
$$\widehat{G}_x(f) = W_T(f) * G_x(f)$$

ezért a teljesítménysűrűség függvény becslése **torzított**.



Spektrumbecslési eljárások

A négyszögletű ablak



$$w_T(\tau)$$

$$W_T(f)$$

$$\log W_T(f)$$



Ha $T \rightarrow \infty$, a Fourier transzformált $\delta(\omega)$ – a konvolúció a pontos Fourier transzformáltat állítja elő \Rightarrow **konzisztencia**

Spektrumbecslési eljárások

Az ablakfüggvény hatása:

- Torzítás: megváltozik a függvény alakja – a csúcsok kiszélesednek, magasságuk csökken.
- Oldalági szivárgás (sidelobe leakage): az oldalágakon 0-tól különböző érték, hullámmzás.
- Csökken a felbontóképesség: összeolvadnak a szomszéd csúcsok.

Az ablakfüggvény hatásának csökkentése:

- Válasszunk minél nagyobb mintaterjedelmet – konzisztencia: a nagyobb minta csökkenti a torzítást.
- Válasszunk a négyszögletűtől eltérő alakú ablakfüggvényt.

Ablakfüggvények:

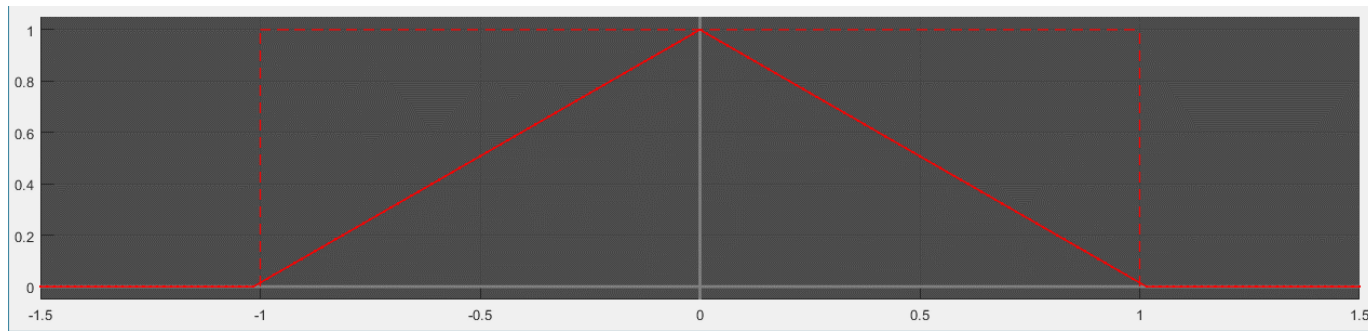
- Háromszögletű, koszinuszos, és még sok más ...

(a felfedezőjükről nevezik el általában)

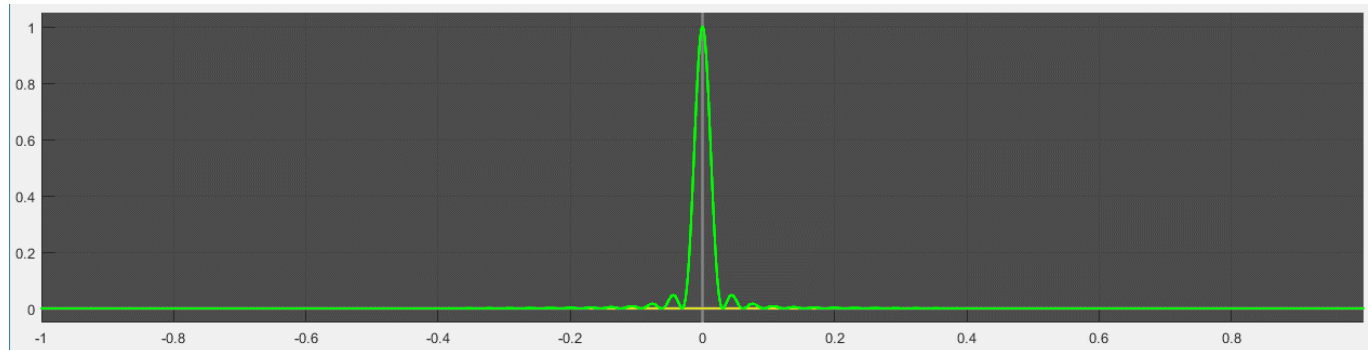


Spektrumbecslési eljárások

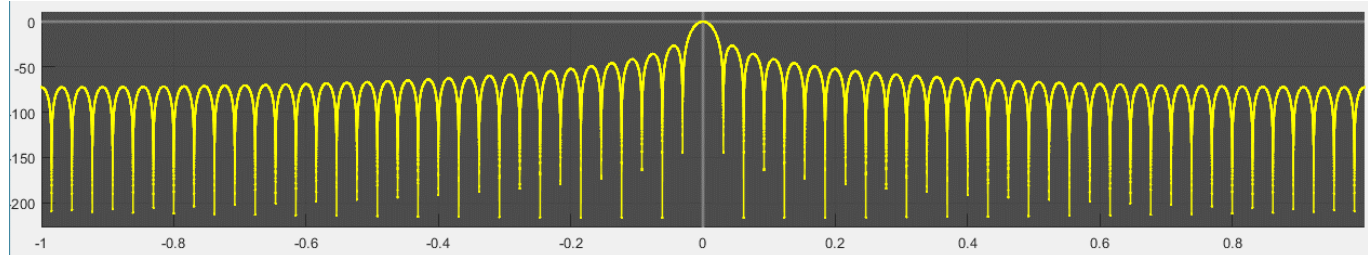
A háromszögletű ablak



$$w_T(\tau)$$



$$W_T(f)$$



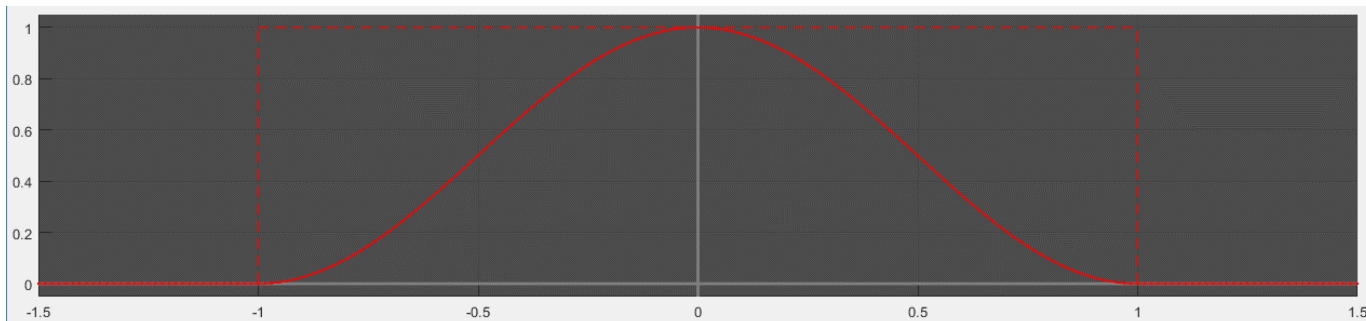
$$\log W_T(f)$$

A korrelációfüggvény korábban említett torzított becslése háromszögletű ablakot eredményez.

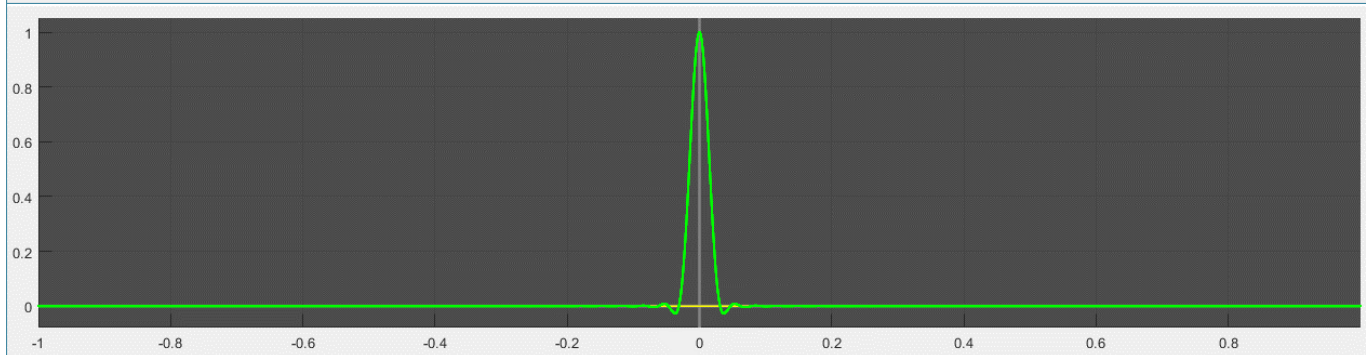


Spektrumbecslési eljárások

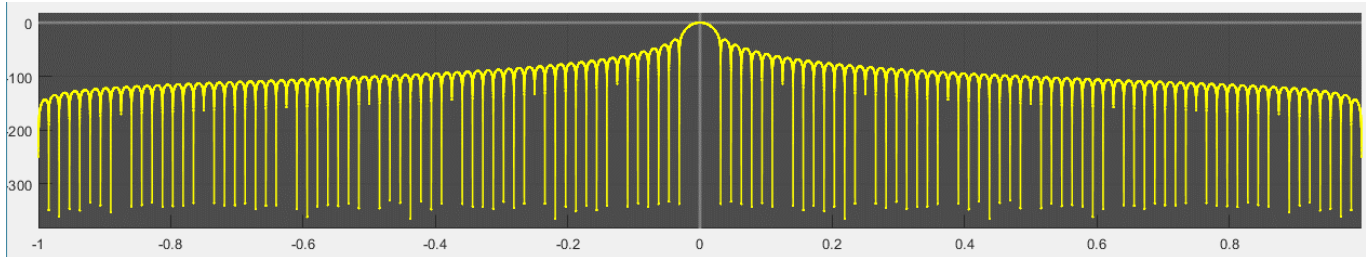
Hamming ablak



$w_T(\tau)$



$W_T(f)$



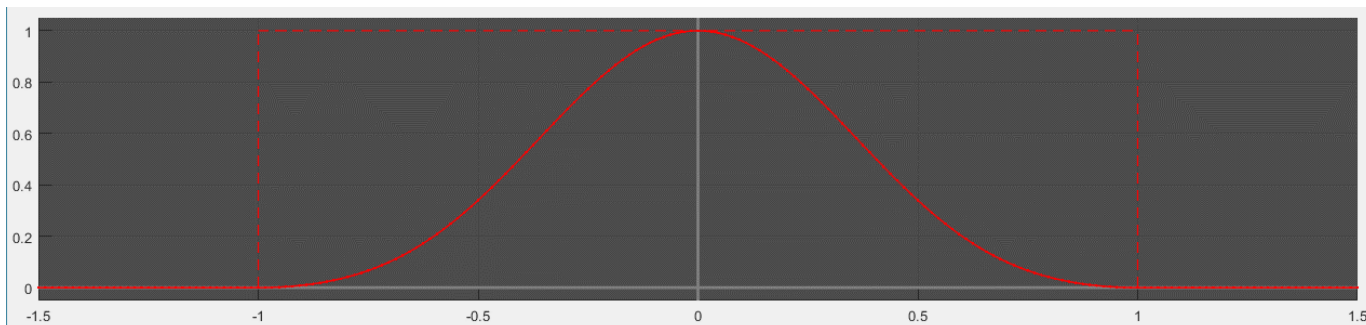
$\log W_T(f)$

$$w(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right] \quad (0 \leq n < N)$$

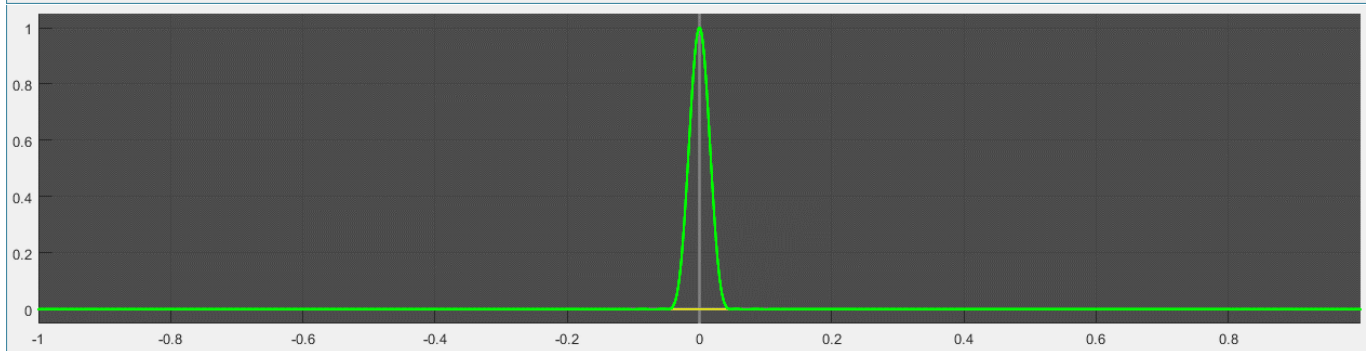


Spektrumbecslési eljárások

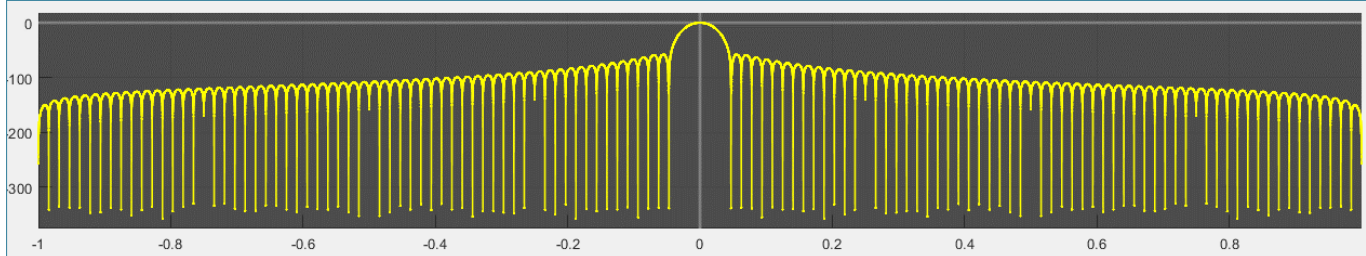
Blackman ablak




$w_T(\tau)$



$W_T(f)$



$\log W_T(f)$

 $w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N-1}\right) \quad (0 \leq n < N)$

Spektrumbecslési eljárások

Auto-teljesítménysűrűség függvény egy másik becslése

Direkt Fourier transzformációs (periodogramm) módszer

$$\hat{G}_x(f) = \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

ahol $X_T(f)$ egy T hosszúságú minta Fourier transzformáltja.

Torzított, de konzisztens becslés.

Előnyei:

- Nincs szükség az autokorreláció függvény előzetes becslésére.
- Hatékony, gyors algoritmussal számolható – FFT.

Hátrányai:

- Torzítás: nem rosszabb, mint a definíció szerinti módszer esetében.
- Variancia: nagyon nagy – 100 % relatív variancia – a módszer önmagában használhatatlan.



Spektrumbecslési eljárások

A periodogram módszer torzítása:

$$\begin{aligned} E[\hat{G}_x(f)] &= E\left[\frac{1}{T} |X_T(f)|^2\right] = \frac{1}{T} E\left[\int_0^T x(u)e^{i\omega u} du \int_0^T x(v)e^{-i\omega v} dv\right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[x(u)x(v)] e^{i\omega u} e^{-i\omega v} dudv = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T R_x(u-v) e^{i\omega(u-v)} dudv \end{aligned}$$

Vezessük be a $\tau = u - v$ helyettesítést, az új változók τ és u .

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T}^0 \int_{-\tau}^T R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} dud\tau + \int_0^T \int_0^{T-\tau} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} dud\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T}^0 (T + \tau) R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^T (T - \tau) R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \end{aligned}$$



Spektrumbecslési eljárások

Összevonva a tagokat és elvégezve a T -vel osztást:

$$E[\hat{G}_x(f)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$



Ez egy háromszögletű ablakkal való szorzás, tehát a becslés **torzított**.

Ugyanakkor, ha $T \rightarrow \infty$, a háromszögletű ablak egyre jobban közelíti azonosan 1 függvényt, tehát a becslés **konzisztens**.



Spektrumbecslési eljárások

A periodogram módszer varianciája:

Kimutatható, hogy normális eloszlású jelek esetén a becslés

N -szabadságfokú χ^2 eloszlást mutat amelynek relatív varianciája 1.

A variancia csökkentésének módja: átlagolás. Több mint (10-100) spektrumának átlagát képezzük.

A direkt Fourier transzformációs (periodogram) módszert **mindig átlagolás** mellett használjuk. Az átlagolás módja:

- Egyszerű átlagolás – az egymás utáni minták Fourier transzformáltját pontonként átlagoljuk: **Bartlett** módszer.
- Átlagolás átlapolással: **Welch** módszer. Az átlapolás lehet pl. 25, 50 vagy akár 75 %-os.



Korreláció függvény becslés

Egy hatékony gyakorlati módszer a korreláció függvények becslésére:

- A jel teljesítménysűrűség függvényének becslése direkt módszerrel (FFT alkalmazása)
- A korreláció függvény meghatározása inverz Fourier transzformáció alkalmazásával (szintén FFT-vel).

Előnyei:

- Az FFT révén gyors végrehajtás, minimális műveletszám.
- A torzítás nem rosszabb, mint a hagyományos korreláció becslés esetén, a becslés pedig konzisztens.



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros



email: soumelidis@mail.bme.hu



BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG