ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK I.
9. SZŰRŐK

MŰEGYETEM 1782

Dr. Soumelidis Alexandros

2018.11.29.

BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

A szűrésről általában

Szűrés: *jelátalakítás*, *jelformálás* idő- vagy frekvencia-tartományban.

Példák:

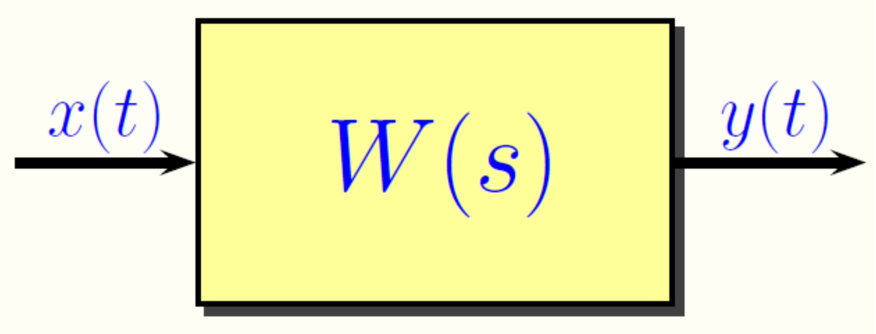
- Anti-aliasing szűrés: sávkorlátozott jel előállítása a mintavételi törvény szerinti helyes mintavételezéshez.
- Zajelnyomás: ismert spektrumú zaj hatásának csökkentése, jel/zaj-viszony javítása.
- Lényegkiemelés: determinisztikus komponens kiemelése, zavaró komponensek, zajok eltávolítása.
- Hallható hangspektrum alakítása: mély/magashang kiemelés / vágás, komponensek leválasztása.
- Képek manipulálása: élesítés, tompítás, sötétítés, világosítás, kontraszt növelése/csökkentése, élkiemelés, színkonverziók.

A szűrés

Szűrő: egy operátor a jelek terében, amely valamely x jelet y jelbe képez le

$S: x \to y$ vagy $y = Sx$

Lineáris szűrő: lineáris operátor, lineáris rendszer



Szűrés szűkebb értelemben:

egy jel meghatározott frekvenciatartományba eső részének kiemelése/csillapítása

Szűrés frekvenciatartományban

Szűrő karakterisztikák (tipikus esetek)

- Aluláteresztő (lowpass – LP) szűrő: a jelet valamely f_c frekvencia alatti sávban engedi csak át.
- Felüláteresztő (highpass – HP) szűrő: a jelet valamely f_c frekvencia feletti sávban engedi csak át.
- Sávszűrő: a jelet valamely f_a és $f_b$frekvenciák közötti sávban
    - engedi át – sávátersztő (bandpass – BP) szűrő, vagy
    - zárja le – sávzáró (bandstop – BS) szűrő.

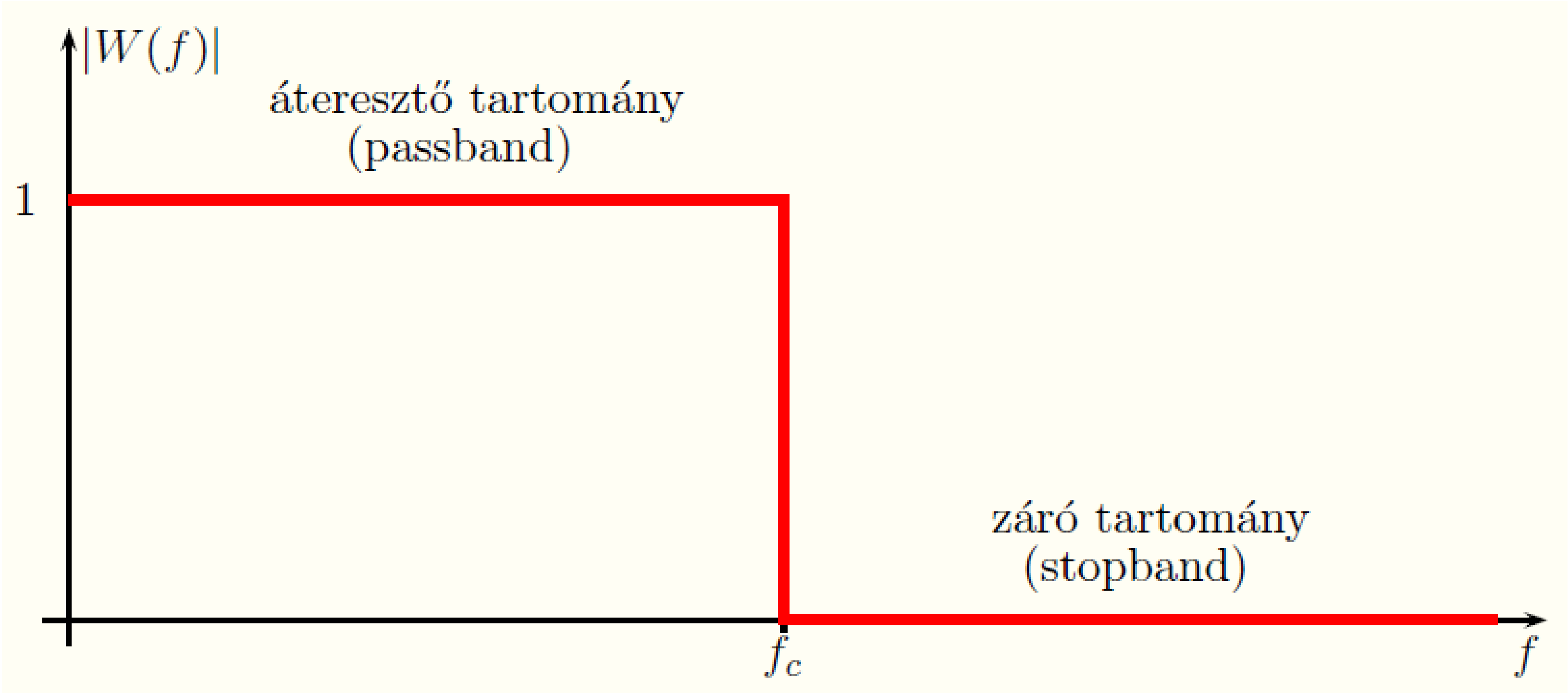
Vannak bonyolultabb szűrő karakterisztikák is, pl.

- Fésű-szűrő (comb filter): több egymás utáni sávban felváltva átereszt ill. lezár

Aluláteresztő szűrő

Az ideális LP szűrő karakterisztikája:

Amplitúdó-karakterisztika

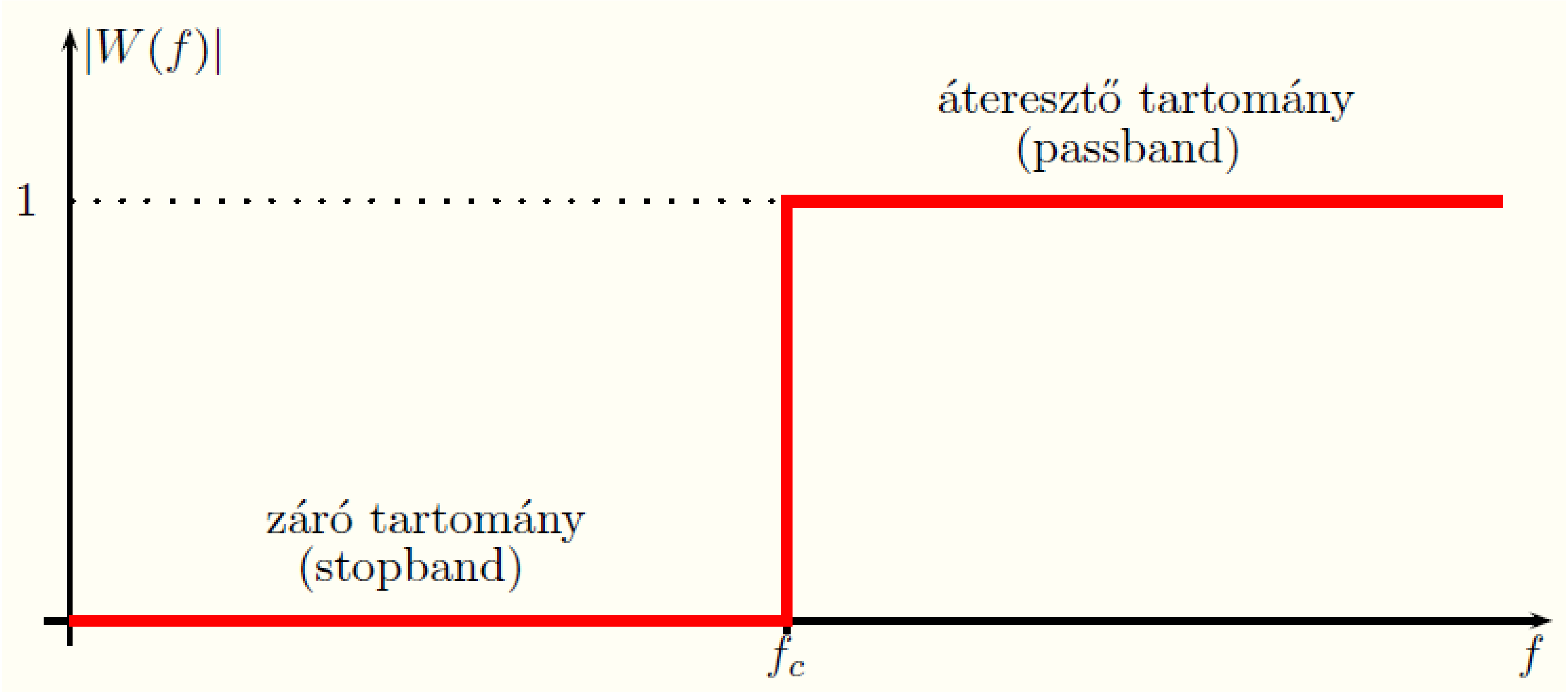


Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Aluláteresztő szűrő

Az ideális LP szűrő karakterisztikája:

Amplitúdó-karakterisztika

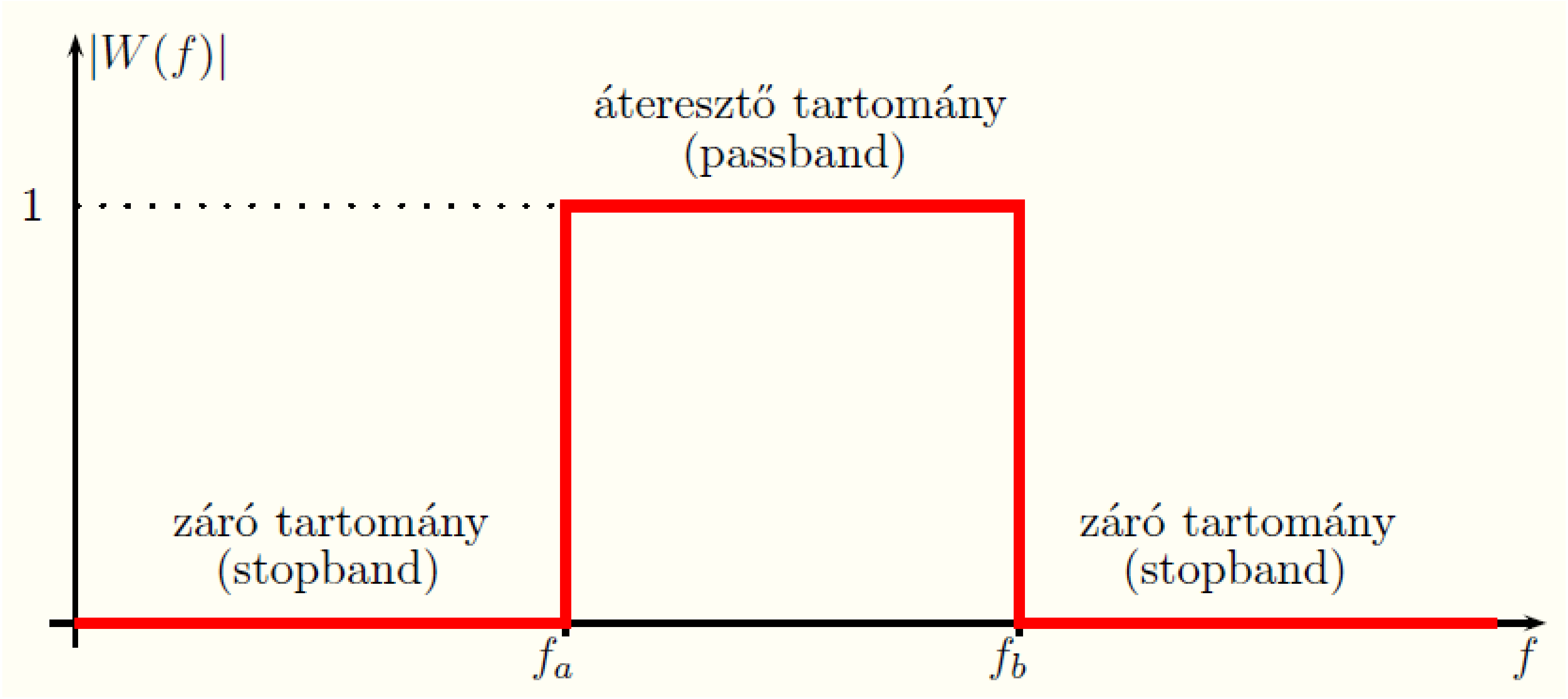


Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Sávátereszt̋ő szűrő

Az ideális BP szűrő karakterisztikája:

Amplitúdó-karakterisztika

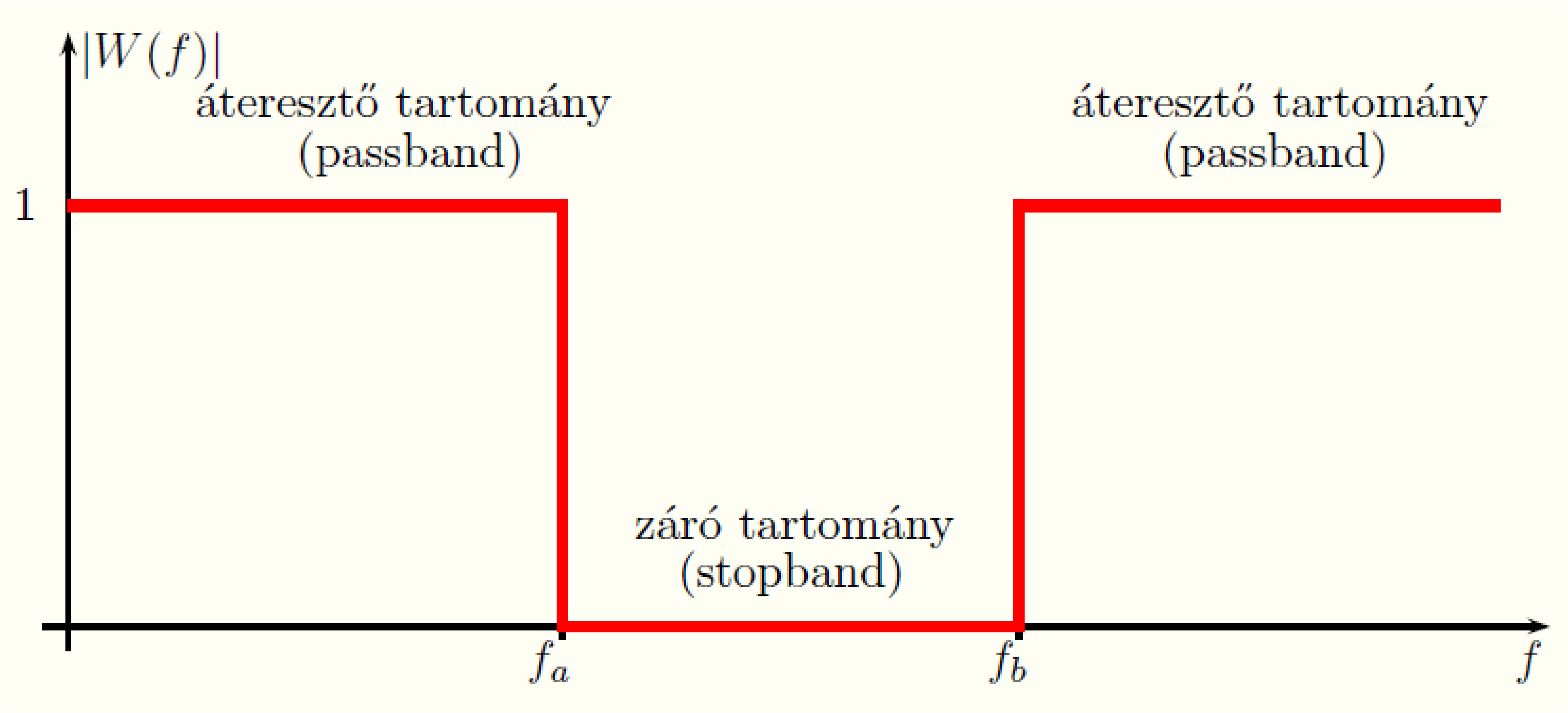


Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

Sávzáró szűrő

Az ideális BS szűrő karakterisztikája:

Amplitúdó-karakterisztika



Fázis-karakterisztika: állandó – azonosan 0.

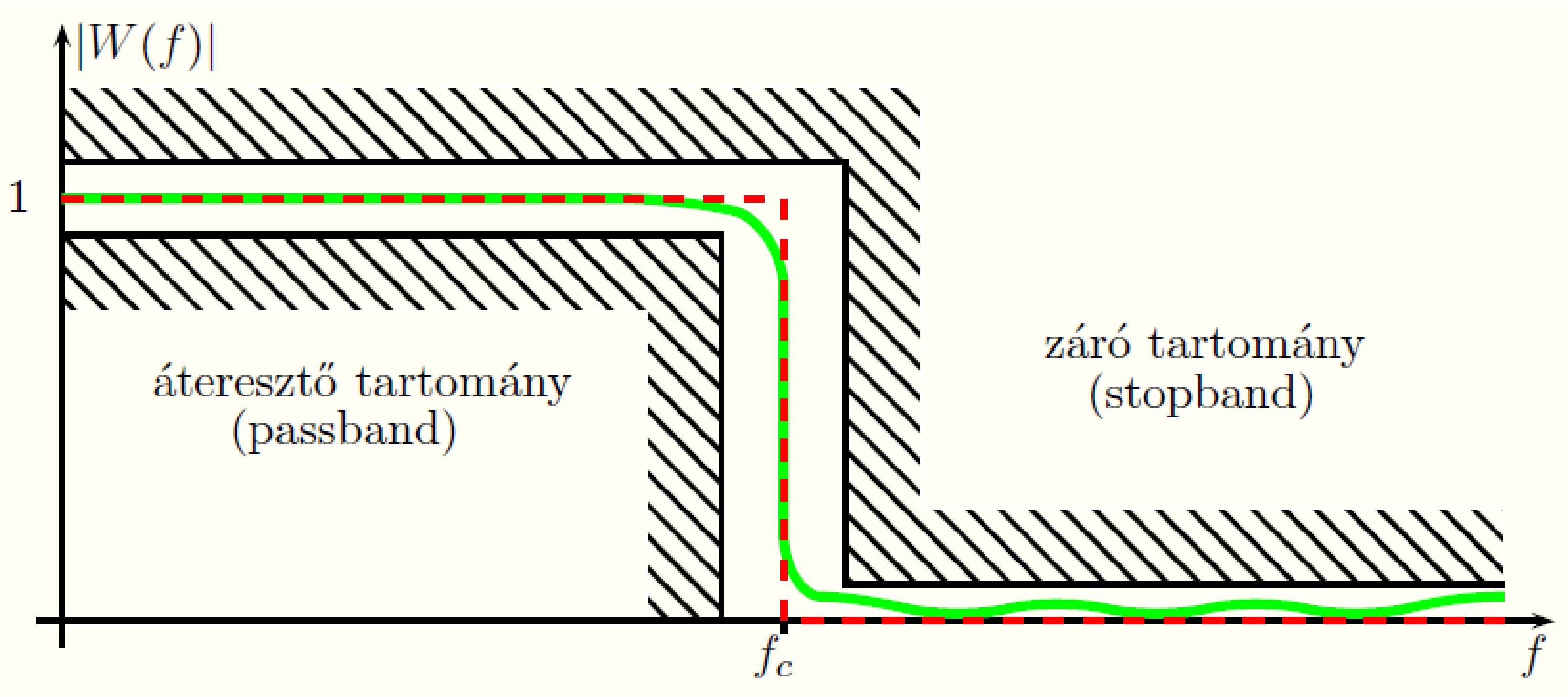
A szűrőtervezés alapelvei

Szűrőtervezés – approximálni az ideális szűrőkarakterisztikát bizonyos feltételek teljesítése mellett:

- Minél pontosabban megvalósítani a sávok határainak megfelelő frekvenciákat.
- Biztosítani a szűrő meredekségét.
- Az áteresztősávi erősítést minél pontosabban 1-re beállítani.
- Az áteresztősávi hullámzást (ha van ilyen) meghatározott érték alatt tartani.
- A zárósávi csillapítást megfelelően kis értékűre állítani.
- A zárósávi hullámzást (ha van ilyen) meghatározott érték alatt tartani.
- A szűrő késleltetését megfelelően kis értéken tartani.
- A szűrő fázismenetét megfelelően megválasztani (pl. lineáris fázis).

A szűrőtervezés alapelvei

Toleranciasávok:



Követelmény: az approximált karakterisztika maradjon a toleranciasávon belül.

A szűrőtervezés alapelvei

Az említetteken kívül még számos követelmény is felállítható, például:

- Időtartományi tulajdonságok – késleltetés, felfutási idő, túllövés – minimalizálása.
- A realizáláshoz tartozó tulajdonságok biztosítása, például:
  - A szűrő zaja áteresztő/záró tartományban legyen valamely határ alatt.
  - A realizáló elemek pontatlanságára legyen minimálisan érzékeny (toleranciaérzékenység minimalizálása)

Szűrő-approximációk

Approximációs módszer:

- Választunk egy approximáló függvényrendszert | ortogonális (vagy valamilyen súlyfüggvényre nézve ortogonális) rendszer kedvező.
- Az approximáció egy függvénysor formájában adódik.
- Véges approximáció együtthatói kiszámíthatók:
    - Ortogonális rendszerek esetén: skaláris szorzat, ortogonális projekció.
    - Általános esetben: least-square illesztés.

Szűrő-approximációk

Butterworth szűrő:

- Monoton, *maximálisan lapos* karakterisztika.
- Nem ortogonális approximáló függvényrendszer – az un. Butterworth polinom.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

(aluláteresztő)

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia

Példák:

$$W_1(\omega) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}} \qquad W_2(\omega) = \frac{1}{1+\sqrt{2}\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$W_3(\omega) = \frac{1}{1+2\frac{s}{\omega_0}+2\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

Szűrő-approximációk

Csebisev (1. típusú Csebisev) szűrő:

- Egyenletes hullámzás az áteresztősávban, monoton karakterisztika a zárósávban.
- $(1-x^2)^{-1/2}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális approximáló függvényrendszer – az elsőfajú Csebisev polinom.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$ (aluláteresztő)

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia,
ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező

$T_n(x)$ az un. elsőfajú Csebisev polinom:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad x = \cos\theta$$

Szűrő-approximációk

Inverz Csebisev (2. típusú Csebisev) szűrő:

- Monoton karakterisztika az áteresztősávban, egyenletes hullámzás a zárósávban.
- Approximáló függvényrendszer: elsőfajú Csebisev polinomon alapuló rendszer.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\varepsilon^2 T_n^{2n}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}}}$$ (aluláteresztő)

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia,
ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező

$T_n(x)$ az ortogonális elsőfajú Csebisev polinom:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad x = \cos\theta$$

Szűrő-approximációk

Elliptikus (Cauer) szűrő:

- Egyenletes hullámzás mind az áteresztősávban, mind pedig a zárósávban.
- $(1-mx^2)^{1/2}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális approximáló függvényrendszer – az elsőfajú elliptikus racionális függvény.

$$|W_n(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 R_n^{2n}\left(\xi, \frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$ (aluláteresztő)

n a szűrő rendszáma, ω_0 a törésponti körfrekvencia, ε a hullámzás mértékét meghatározó tényező, ξ a szelektivitásra (az áteresztősávi és zárósávi erősítés közti különbségre) vonatkozó tényező

$R_n(x)$ az un. elsőfajú elliptikus (Jacobi) racionális függvény.

Analóg és digitális szűrők

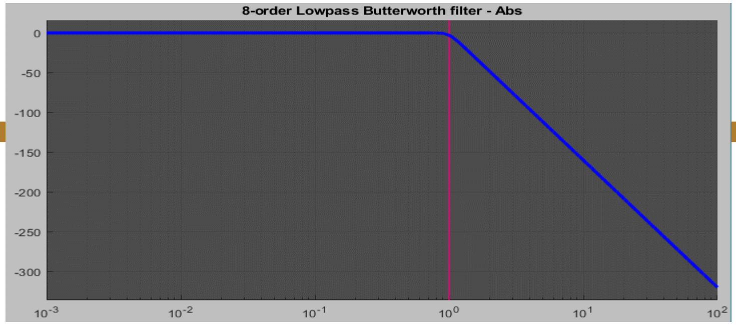
További osztályozási szempontok

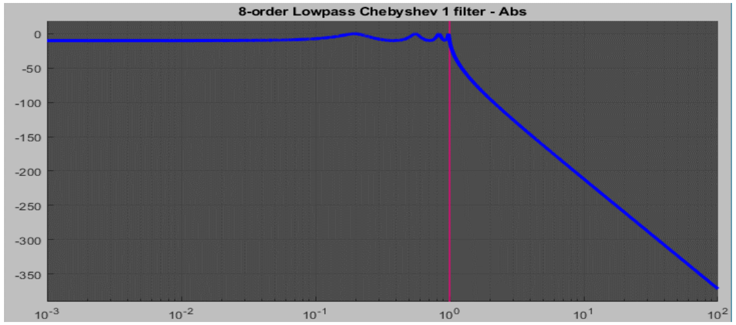
- Folytonos idejű szűrő vagy analóg szűrő, $W(s)$.
- Diszkrét idejű szűrő vagy digitális szűrő, $W(z)$:
  - Véges impulzusválaszú szűrő – FIR (Finite Impulse-Response)
  - Végtelen impulzusválaszú szűrő – IIR (Infinite Impulse-Response)

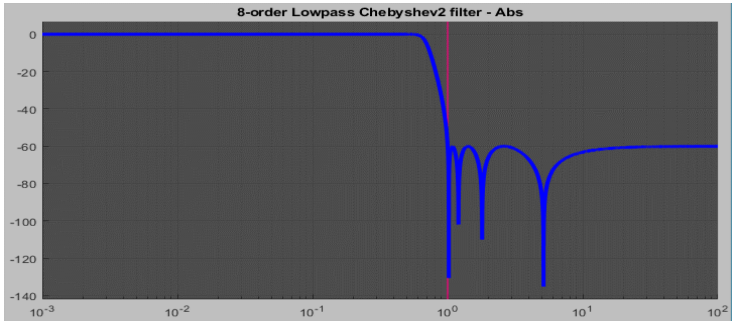
Analóg szűrők

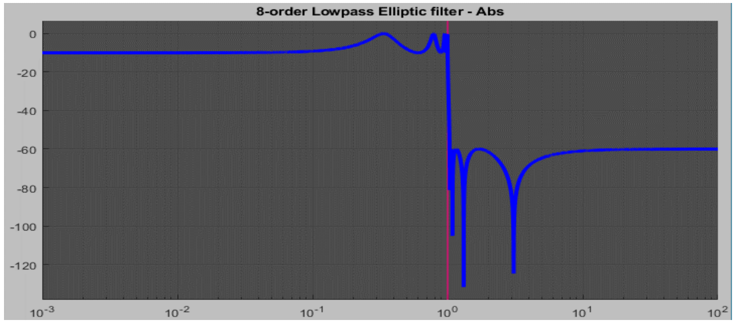
Leggyakoribb alaptípusok:

- **Butterworth** szűrő – „maximálisan lapos” karakterisztika.
- **Csebisev** szűrő – áteresztőtartományban egyenletes hullámzás.
- **Inverz Csebisev** szűrő – zárótartományban egyenletes hullámzás.
- **Elliptikus szűrő** – áteresztő- és zárótartományban egyenletes hullámzás





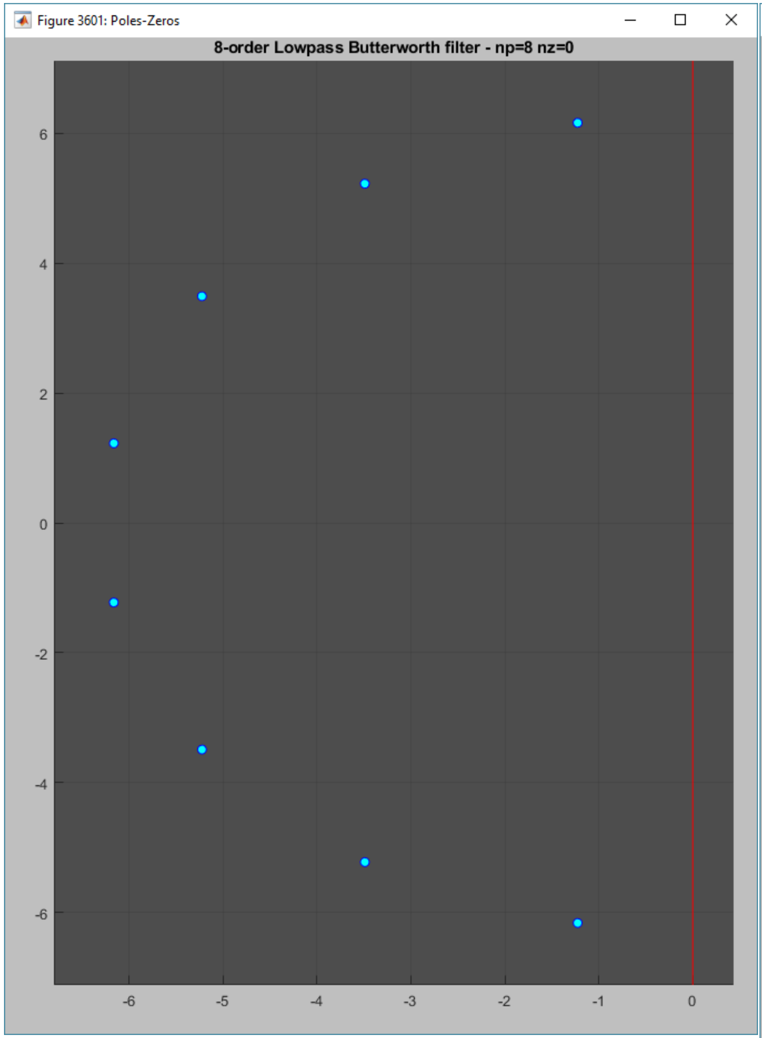


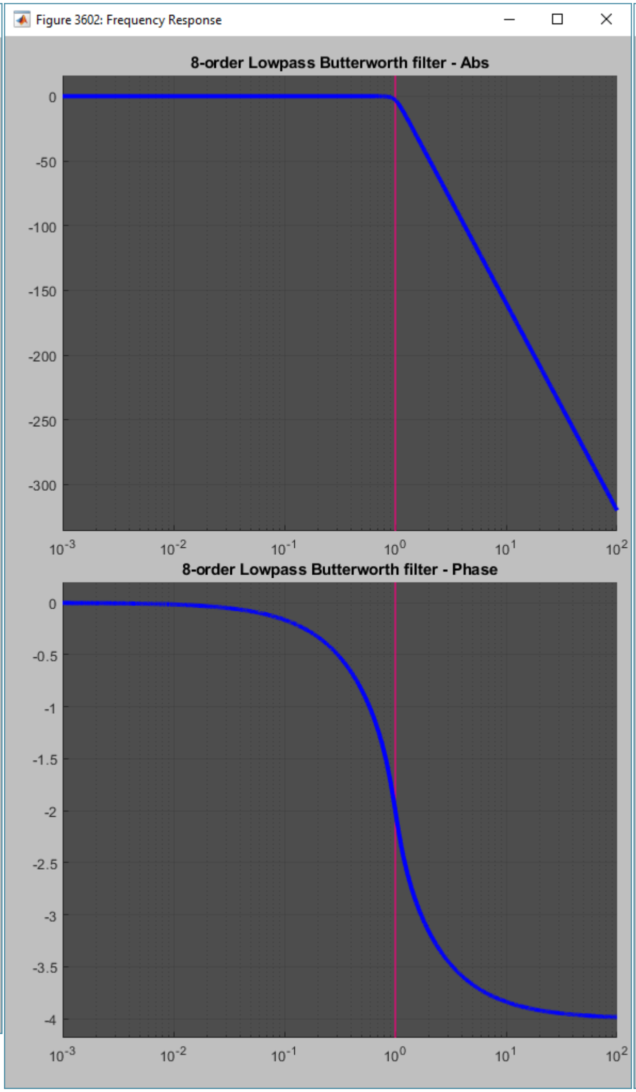


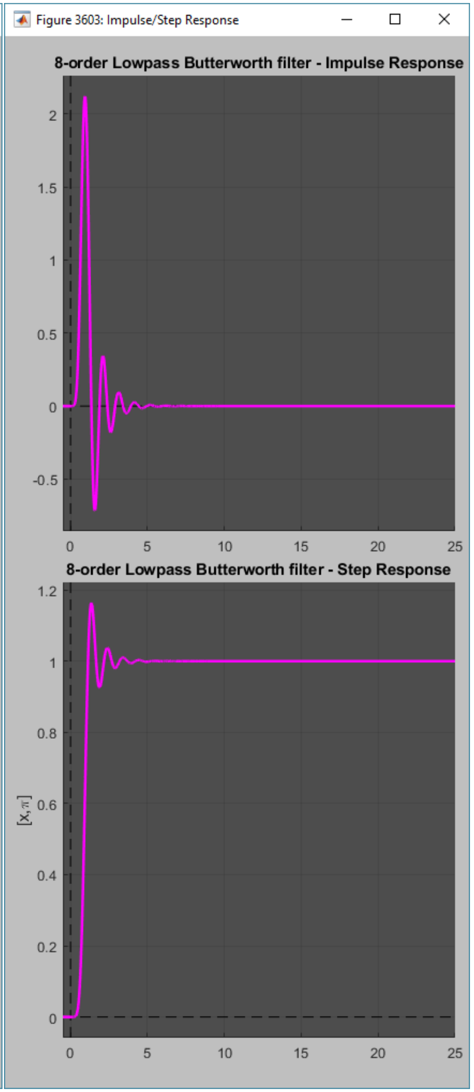
(log-log ábrázolás)

Hullámzás – ripple
Egyenletes hullámzású - equiripple

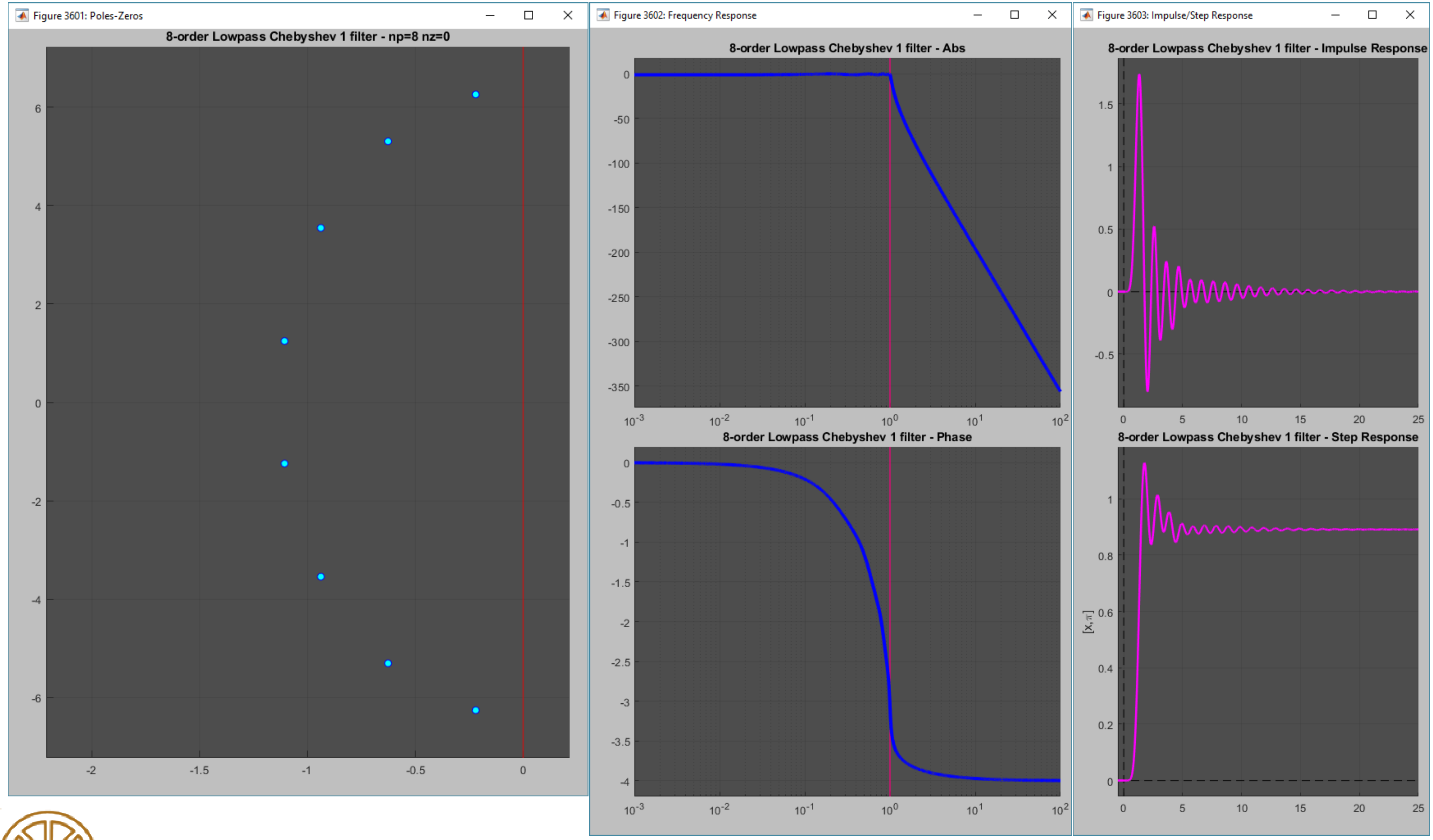
8-rendű Butterworth LP szűrő



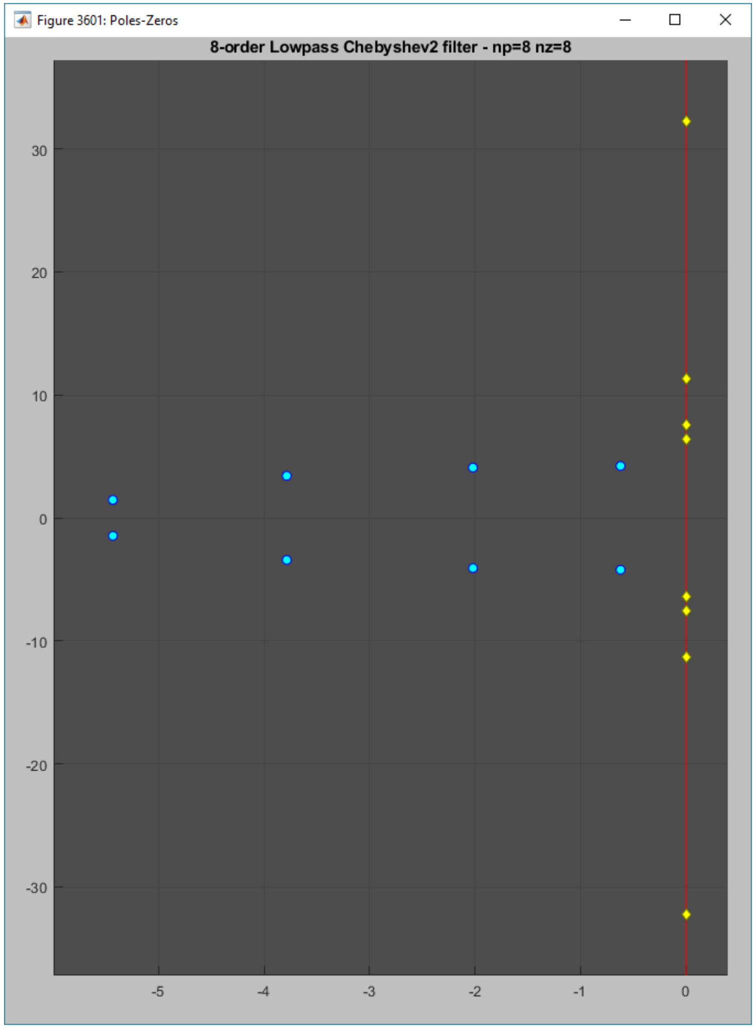


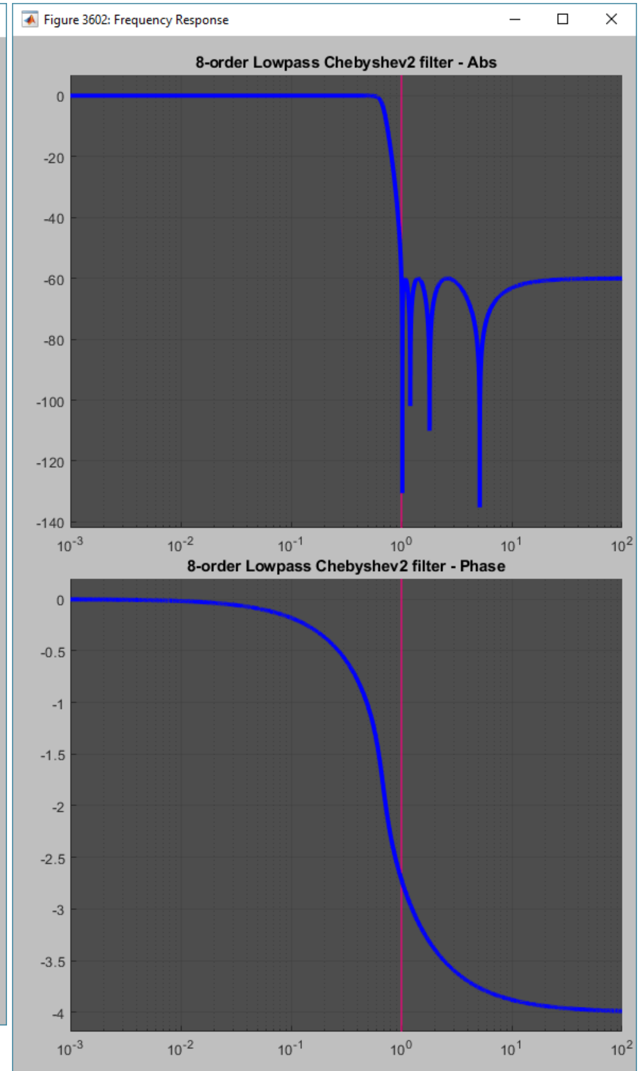


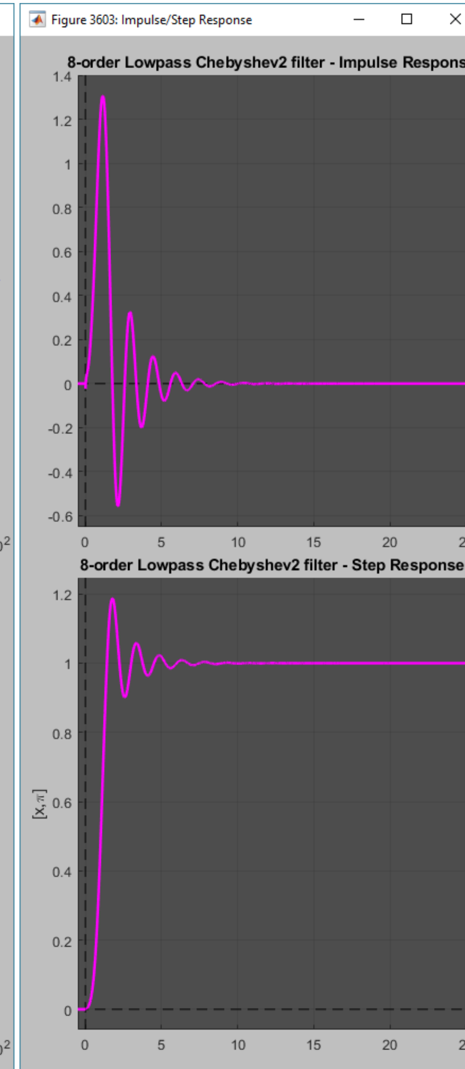
8-rendű Csebisev LP szűrő



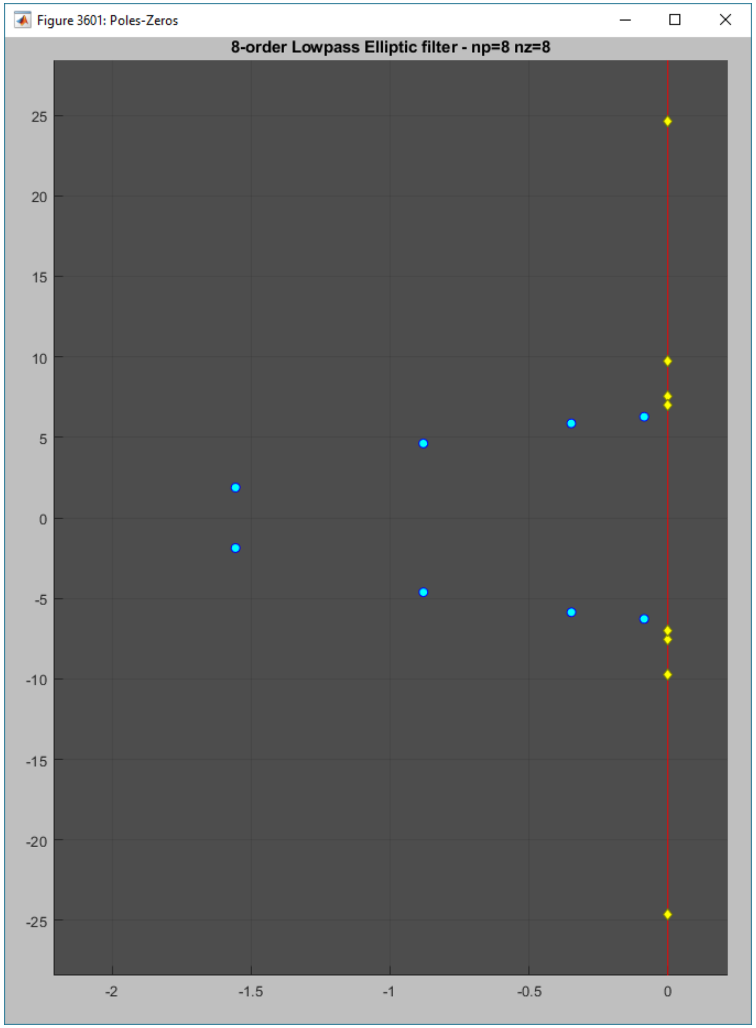
8-rendű inverz Csebisev LP szűrő

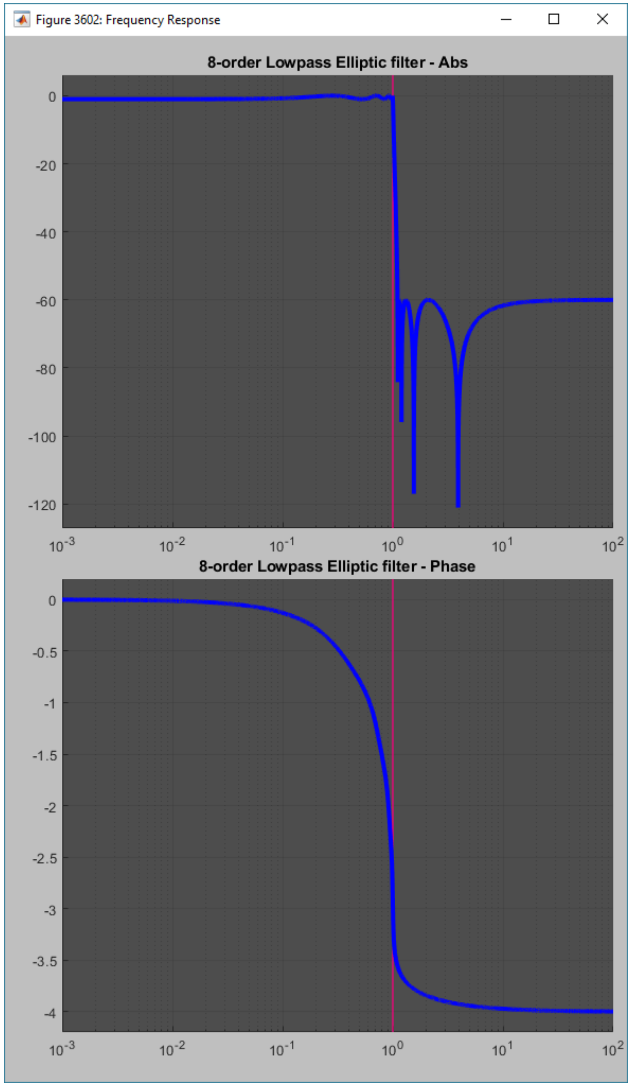


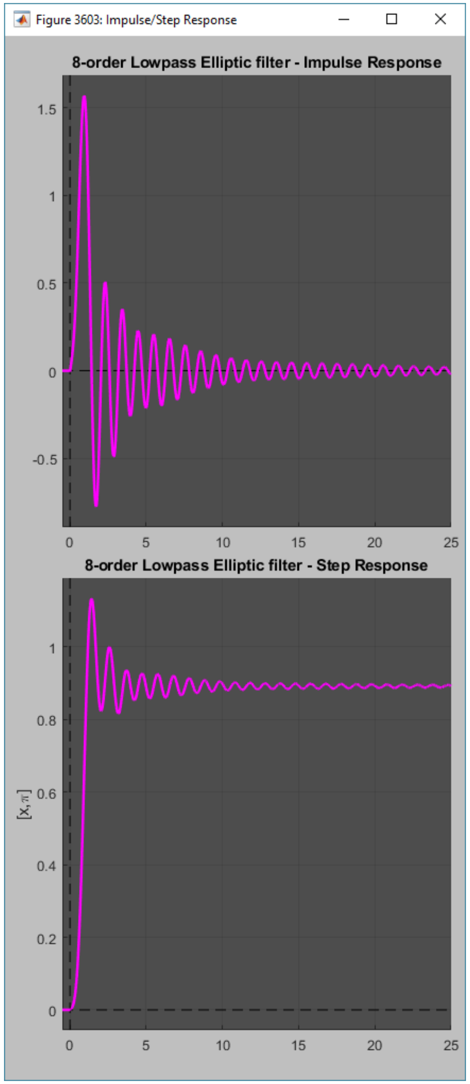




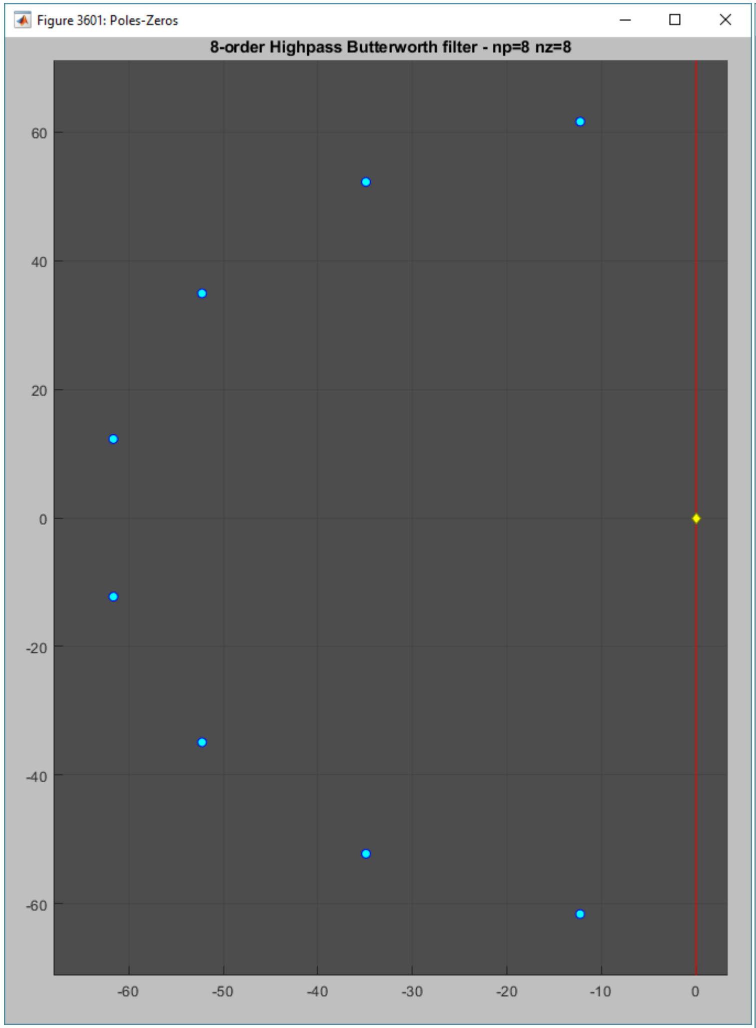
8-rendű elliptikus LP szűrő

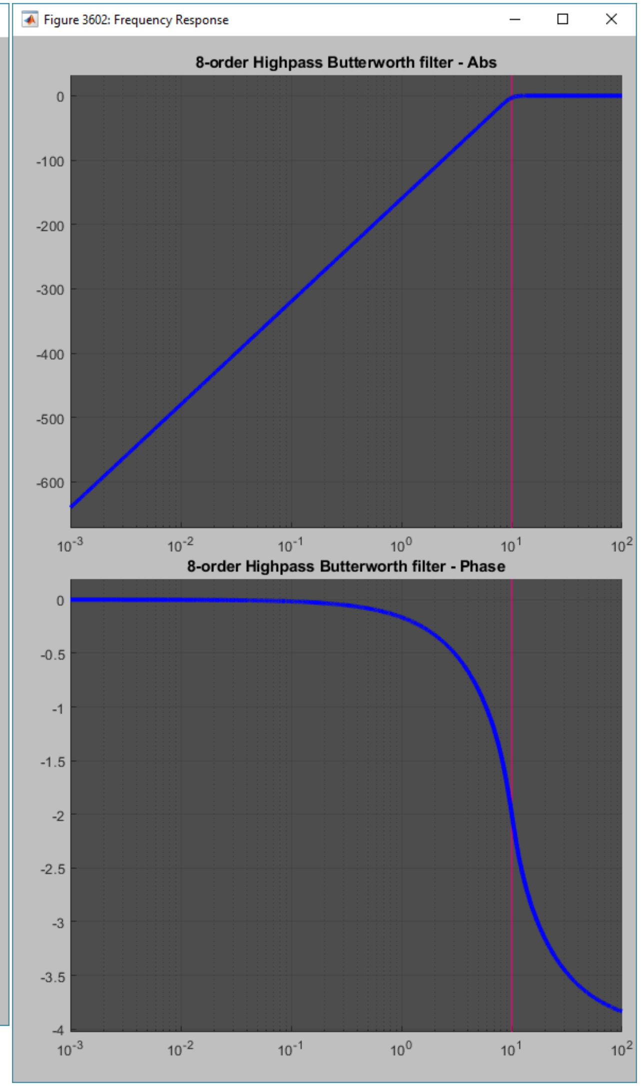


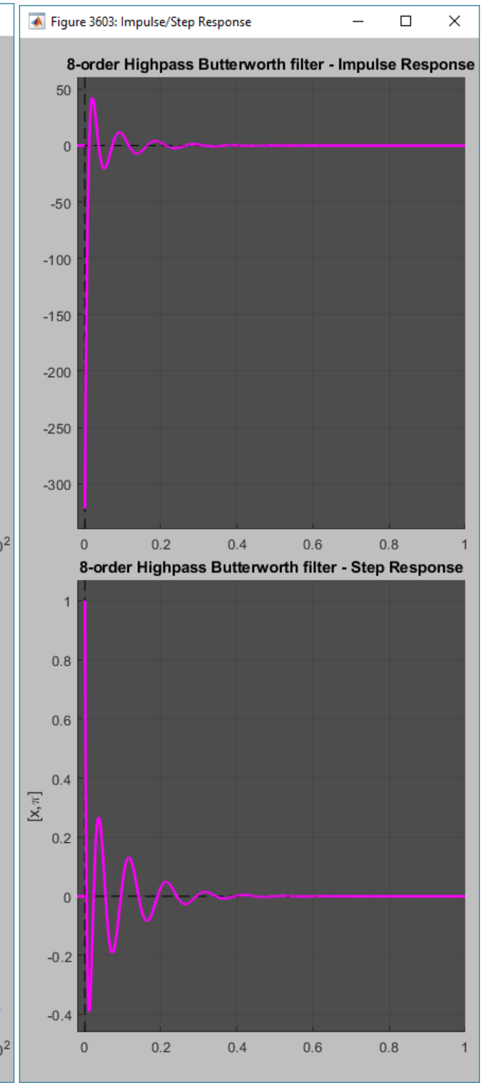




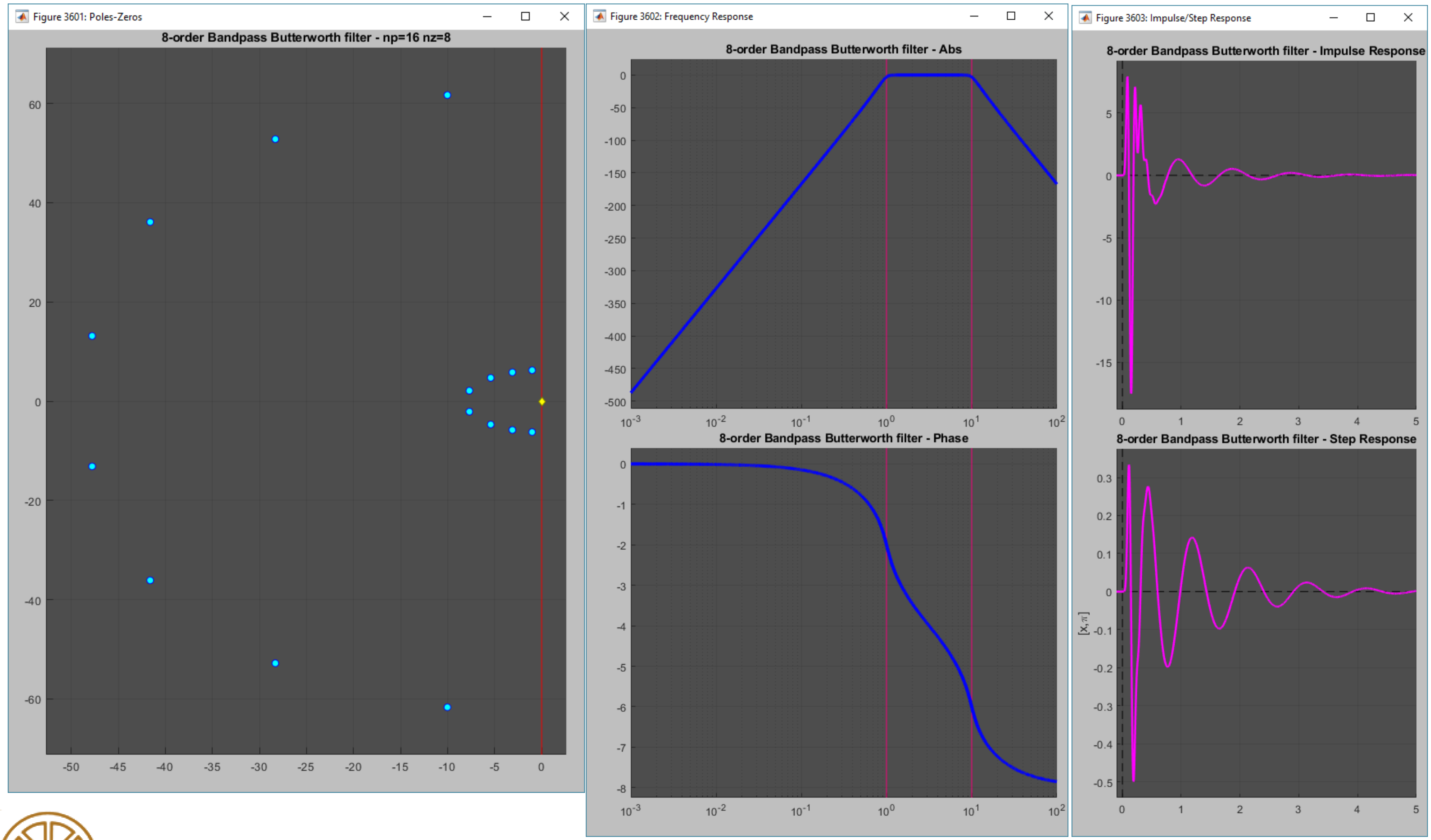
8-rendű Butterworth HP szűrő



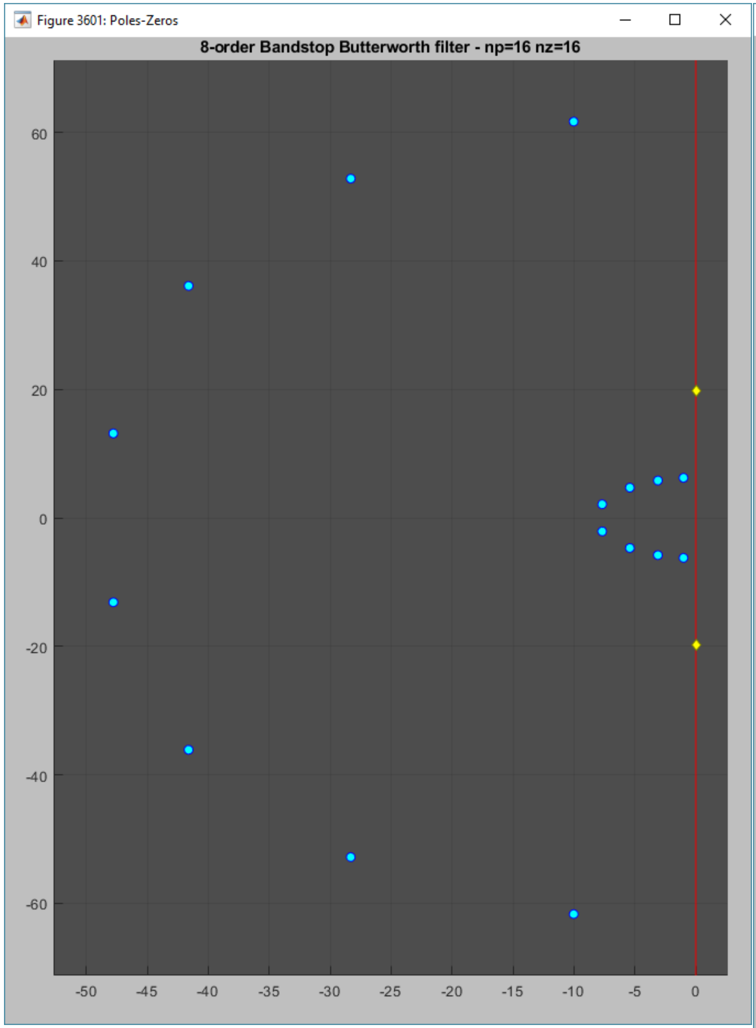


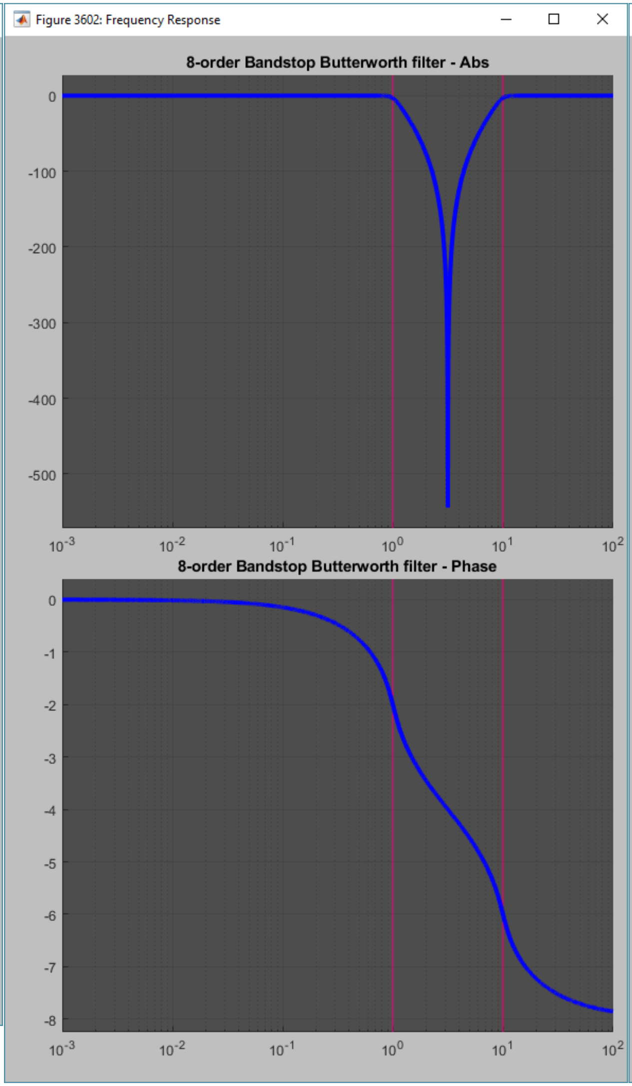


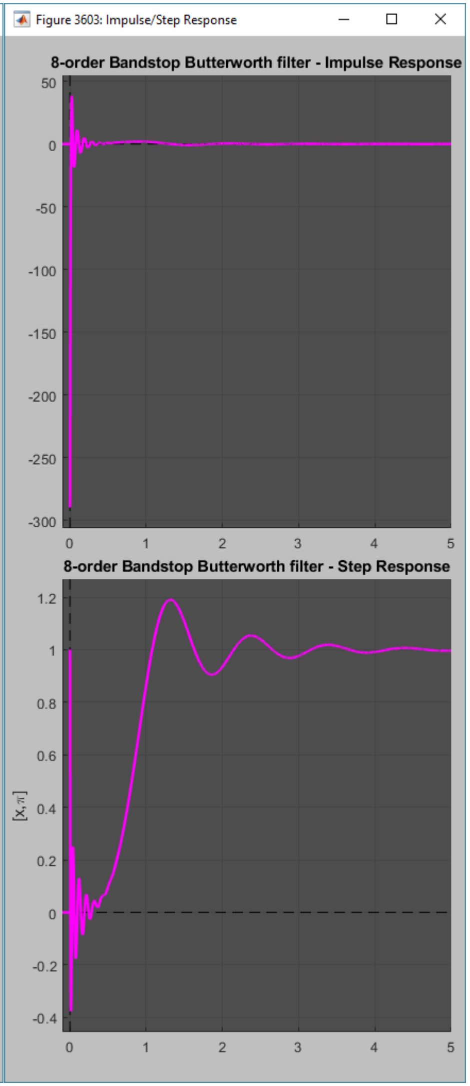
8-rendű Butterworth BP szűrő



8-rendű Butterworth BS szűrő







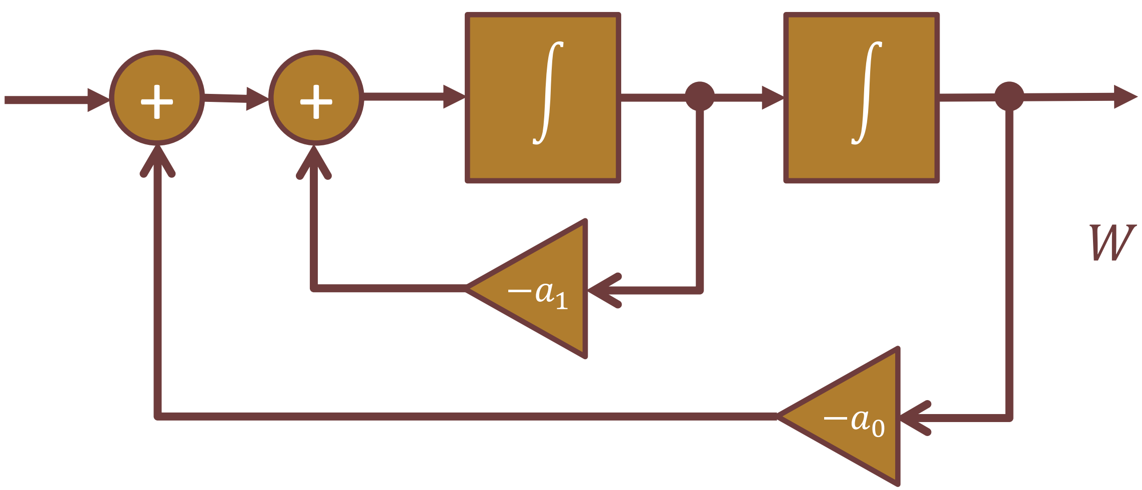
Analóg szűrők

Előállításuk: első- és másodrendű alaptagok kombinációjaként

- Kaszkád kapcsolás: az alaptagok egymás után kapcsolása

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) \ldots W_1\,(s)$$

- Állapottér alapú realizáció – integrátorok, erősítők, összeadók, negatív visszacsatolás alkalmazása („analóg számítógép”)



$$W(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

Analóg szűrők

Alaptagok:

- Elsőrendű alaptag: egy valós pólust realizál.
- Másodrendű alaptag: egy komplex konjugált póluspárt realizál.

Megvalósítás:

- Elsőrendű alaptag: egy RC vagy RL osztó (gyakoribb a RC).
- Másodrendű alaptag: egy RLC kör, vagy aktív RC-szűrő.

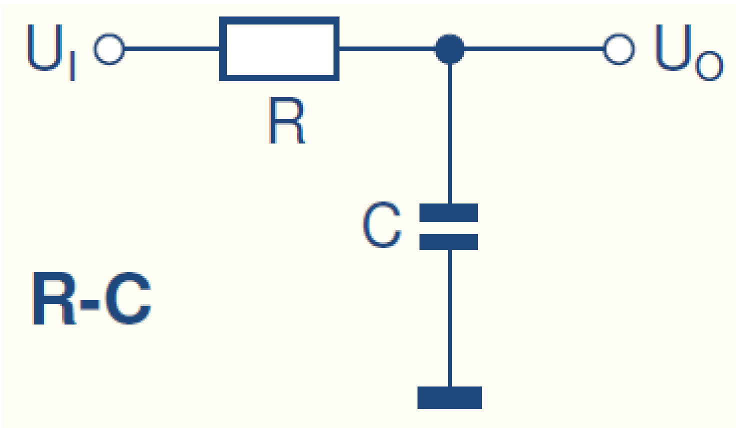
A megvalósítás problémái: az alaptagok hatnak egymásra

- Soros és párhuzamos kapcsolások alakulnak ki.
- Egy fokozat terheli az előtte levőt.

Megoldás: aktív leválasztás (erősítők) – ezért előnyösek az aktív RC szűrők

Analóg szűrő alaptagok

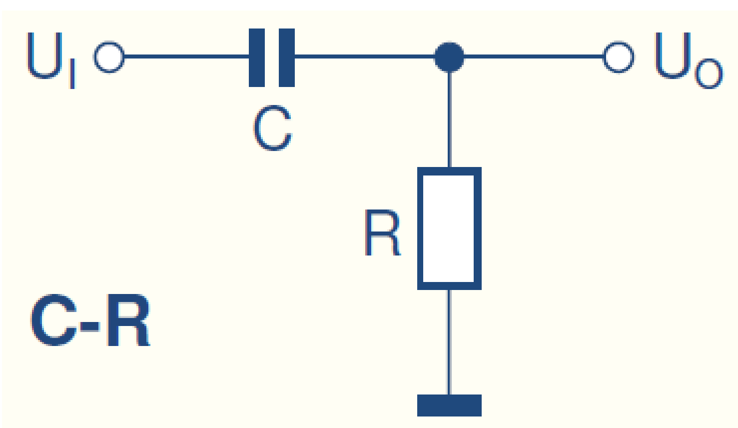
RC tagok: 1 ellenállás + kapacitás – elsőrendű alaptag



$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

LP karakterisztika



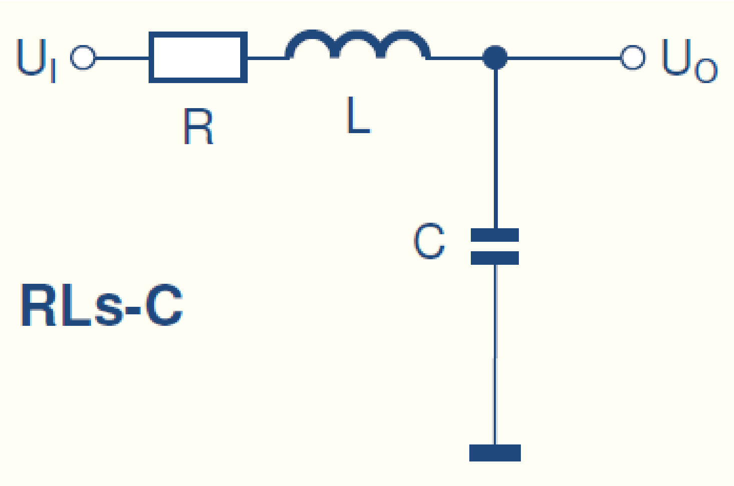
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{sRC}{sRC + 1}$$

HP karakterisztika

Analóg szűrő alaptagok

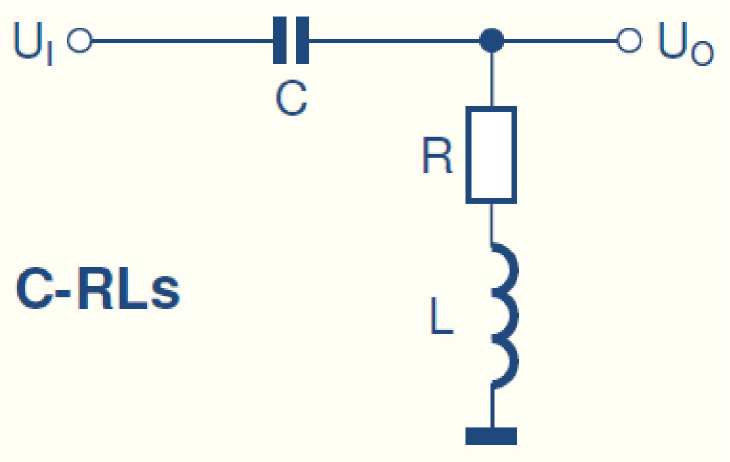
RLC tagok: 1 ellenállás + kapacitás + induktivitás – másodrendű alaptag



$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$W(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

LP karakterisztika



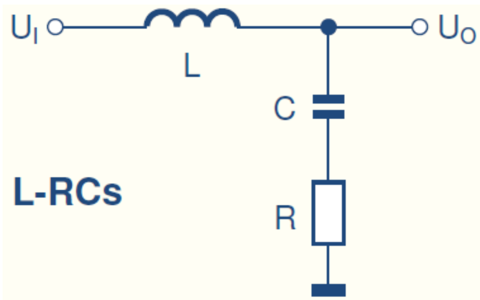
$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$W(s) = \frac{s^2LC + RCs}{s^2LC + sRC + 1}$$

HP karakterisztika

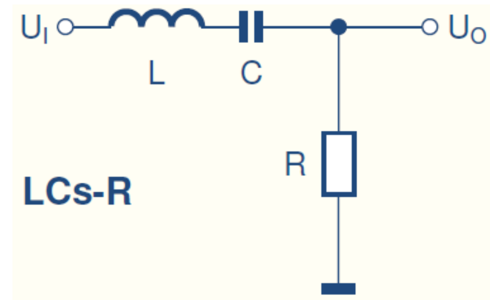
Analóg szűrő alaptagok

RLC tagok: 1 ellenállás + kapacitás + induktivitás – másodrendű alaptag



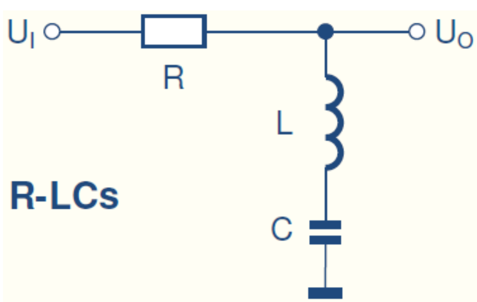
LP

$$W(s) = \frac{RCs + 1}{s^2LC + sRC + 1}$$



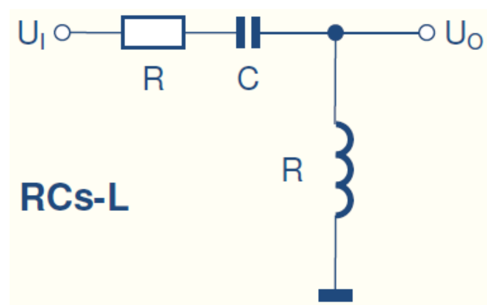
BP

$$W(s) = \frac{RCs}{s^2LC + sRC + 1}$$



BS

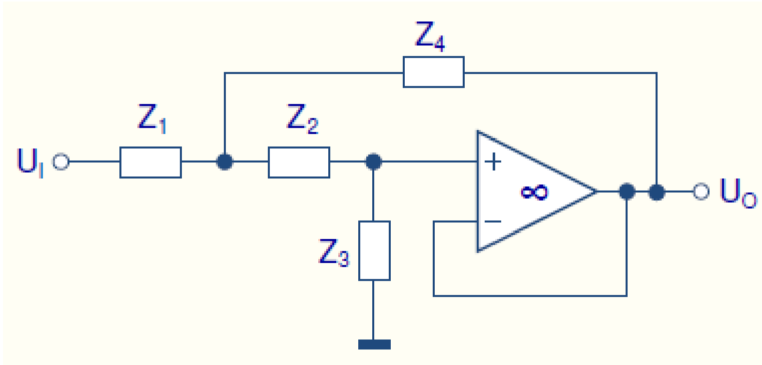
$$W(s) = \frac{s^2LC + 1}{s^2LC + sRC + 1}$$



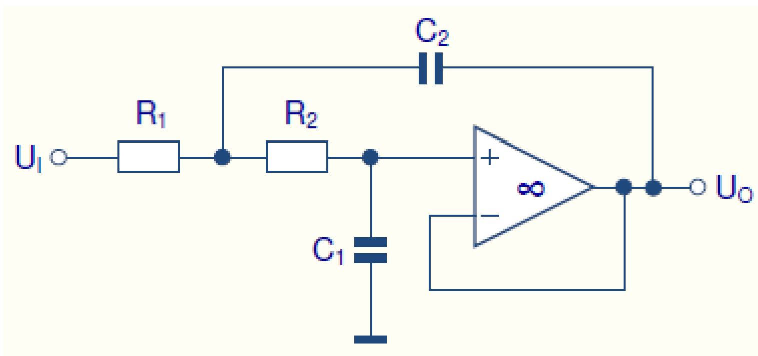
HP

$$W(s) = \frac{s^2LC}{s^2LC + sRC + 1}$$

Aktív RC szűrő: a Sallen-Key elrendezés

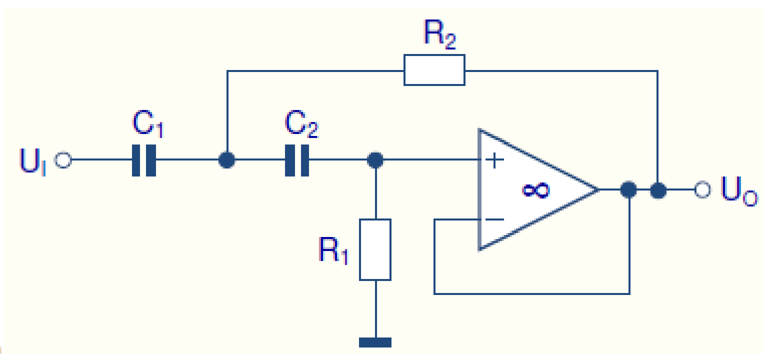


$$W(s) = \frac{U_O(s)}{U_I(s)} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2) + Z_3 Z_4}$$



Aluláteresztő (LP) karakterisztika

$$W(s) = \frac{C_1 C_2}{R_1 R_2 s^2 + C_2(R_1 + R_2)s + C_1 C_2}$$



Felüláteresztő (HP) karakterisztika

$$W(s) = \frac{R_1 R_2 s^2}{R_1 R_2 s^2 + R_2(C_1 + C_2)s + C_1 C_2}$$

Toleranciaérzékenység

A szűrőkarakterisztika erősen függ az alkalmazott elemek értékeinek pontosságától.

Példa: Sallen-Key LP

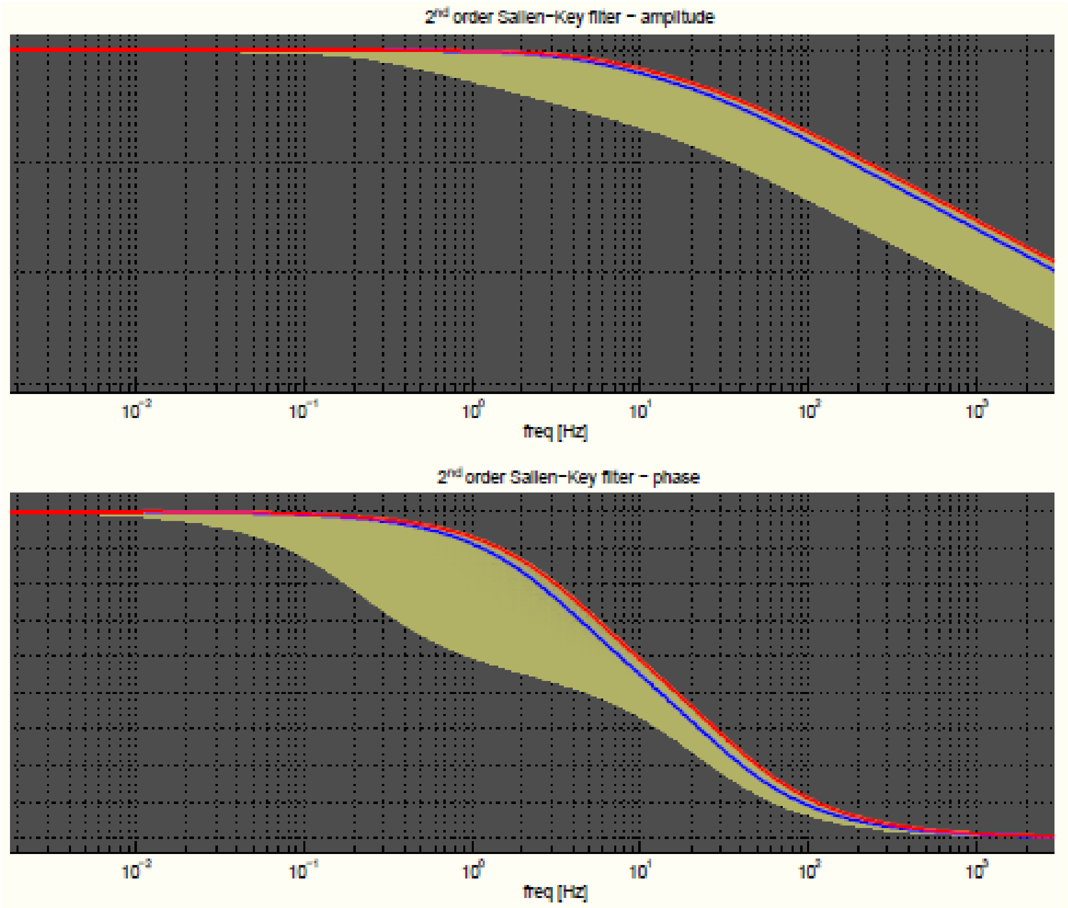
R értéktolerancia: ±1%

C értéktolerancia: ±5%

Elméleti értékek alkalmazása

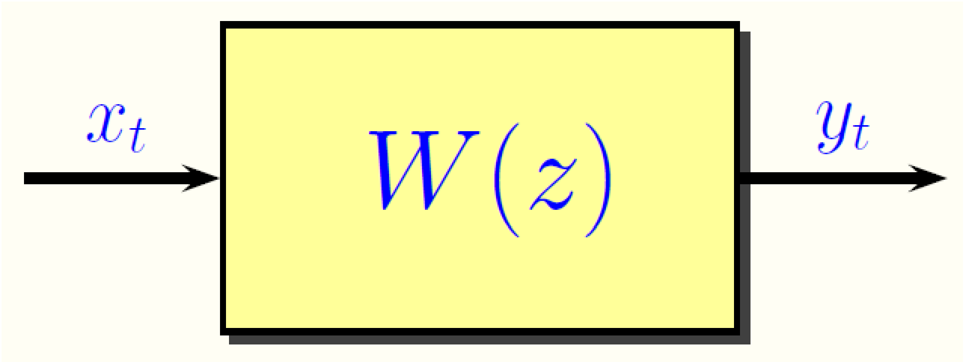
Standard értékek alkalmazása

Tolerancia sáv



Digitális szűrők

Diszkrét idejű lineáris rendszerekkel realizált szűrők: bemeneti és kimeneti jeleik numerikus sorozatok.



Időtartománybeli leírás:

- $\{w_t\}$ súlyfüggvény (súlysorozat) – $\{y_t\} = \{w_t\} * \{x_t\}$

Frekvenciatartománybeli leírás:

- $W(z)$ impulzusátviteli függvény az egységkörön értelmezve:

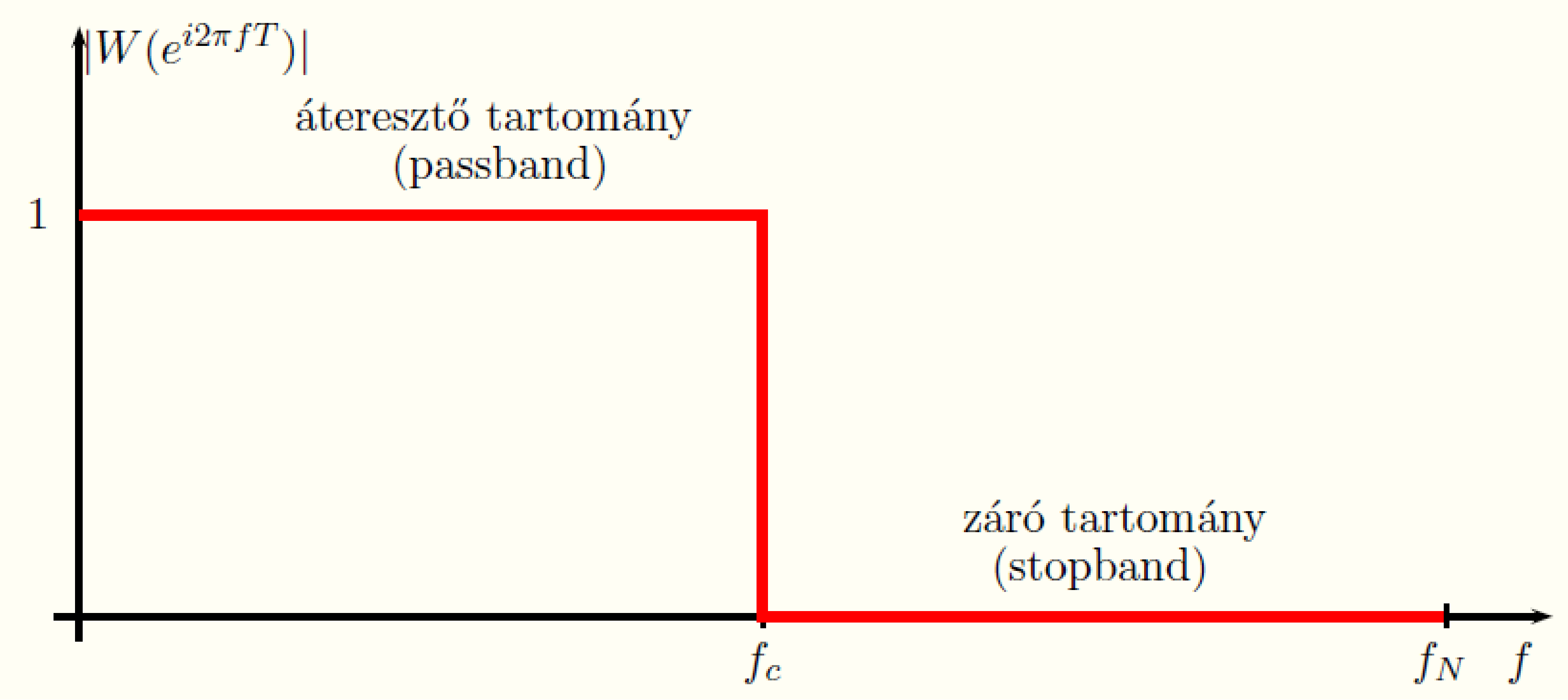
  $z = e^{i2\pi fT}$ $\quad 0 \leq f < f_N$ a fizikailag értelmezhető tartomány

  T a mintavételi periódusidő, $f_s = 1/T$ a mintavételi frekvencia, $f_n = f_s/2$ a Nyquist-frekvencia

Digitális aluláteresztő szűrő

Az ideális LP szűrő karakterisztikája:

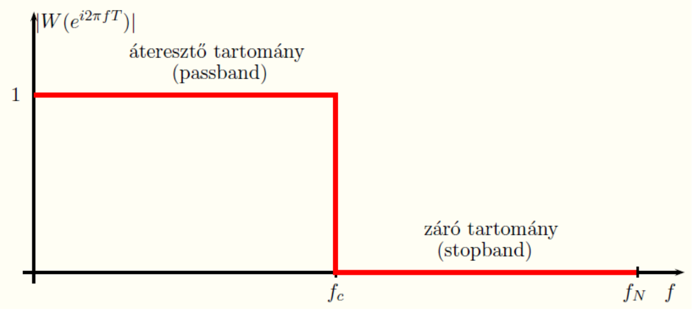
Amplitúdó-karakterisztika



Fázis-karakterisztika állandó – azonosan 0.

Digitális aluláteresztő szűrő

Vajon megvalósítható a gyakorlatban az ideális szűrő karakterisztika:



A lehetséges módszer:

- A bemeneti jelet Fourier transzformáljuk,
- Az áteresztősávban meghagyjuk, a zárósávban nullázzuk a spektrum értékeket.
- Inverz Fourier transzformációval megkapjuk a szűrt kimeneti jelet.

Mikor alkalmazható? Ha az egész minta rendelkezésre áll — utólagos, off-line feldolgozásnál; valós idejű szűrésre nem alkalmas.

Megjegyzés: a művelet megfelel egy ablakfüggvény inverz Fourier transzformáltjával való konvolúciónak — $\sin x/x$ alakú súlyfüggvény, végtelen kiterjedésű

Ideális szűrőt kapunk? A gyakorlatban nem, mert a transzformációt csak véges mintára tudjuk végrehajtani, ill. a súlyfüggvénynek csak véges darabját tudjuk felhasználni.

Digitális aluláteresztő szűrő

Közelítő módszerként viszont alkalmazható:

Az ideális LP szűrő súlyfüggvénye: az impulzusátviteli függvény inverz Fourier transzformáltja ($-\infty < n < \infty$):

$$w_n = \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi f nT} df = \left[\frac{e^{i2\pi f nT}}{i2\pi nT}\right]_{-f_c}^{f_c} =$$

$$= \left[\frac{e^{i2\pi f_c nT} - e^{-i2\pi f_c nT}}{i2\pi nT}\right] = f_c \frac{\sin(n\pi\, f_c/f_N)}{n\pi\, f_c/f_N}$$

Egy végtelen sorozat: a gyakorlatban csak véges tagja használható, ez megfelel a szűrő véges közelítésének.

Gyakorlati megjelenési formája: a kívánt szűrőkarakteriszika véges diszkrét Fourier-transzformáltját képezzük.

Kauzális – akár rekurzívan is alkalmazható – szűrőt kapunk, ha a $\{w_n\}_M$ véges súlyfüggvényt M taggal jobbra tolva alkalmazzuk – ez M lépés késleltetés visz be.

Digitális szűrők

Frekvenciatartomány (érvényességi tartomány):

Mivel a digitális szűrők átviteli tartományát az $f_N = f_S/2$ Nyquist frekvenciáig értelmezzük, gyakori a relatív (vagy normalizált) frekvencia alkalmazása:

$$\varphi = \frac{f}{f_N} \qquad 0 \leq f < f_N \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \varphi < 1$$

φ független az aktuális mintavételi frekvenciától. A tényleges szűrési frekvenciatartomány az alkalmazott mintavételi frekvenciától függ.

Digitális szűrők

A digitális szűrők alapvető típusai:

- Véges impulzusválaszú (FIR – Finite Impulse-Response) szűrők: $\{w_t\}$ véges számú elemet tartalmaz.
- Végtelen impulzusválaszú (IIR – Infinite Impulse-Response) szűrők: $\{w_t\}$ végtelen sorozat.

FIR szűrők

Véges impulzusválaszú (FIR — Finite Impulse-Response) szűrők:

Általános kifejezése:

időtartományban $y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_m x_{t-m}$

frekvenciatartományban $W(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ldots + \beta_m z^{-m}$

polinom

A bemeneti jel véges számú minta-értékének súlyozott átlaga.

Lehet

- Mozgóátlag szűrő: folyamatosan, minden mintapontra átlapolással működik.
- Decimáló szűrő: m bemeneti adatonként szolgálta egy kimeneti értéket.

Átlag mint FIR szűrő

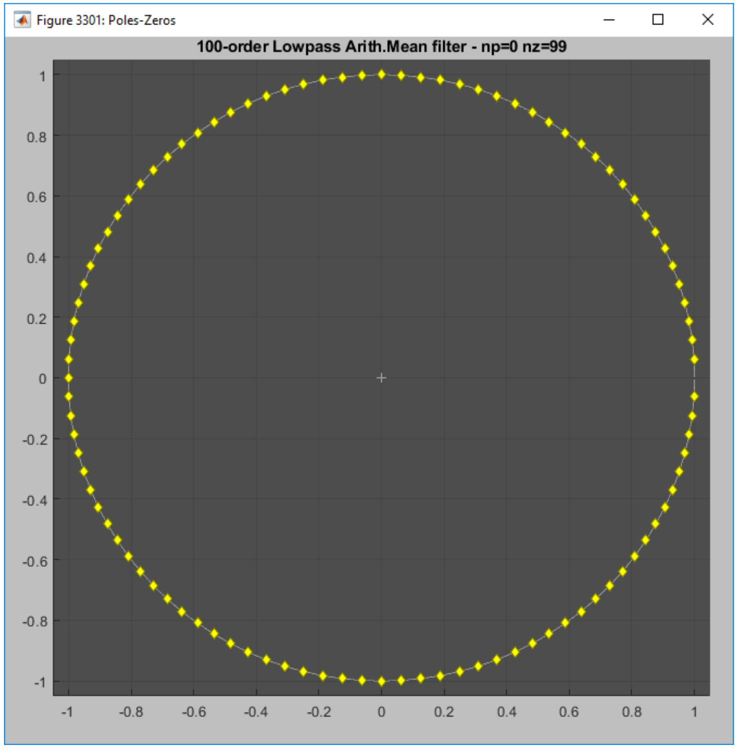
N-pontos aritmetikai átlag:

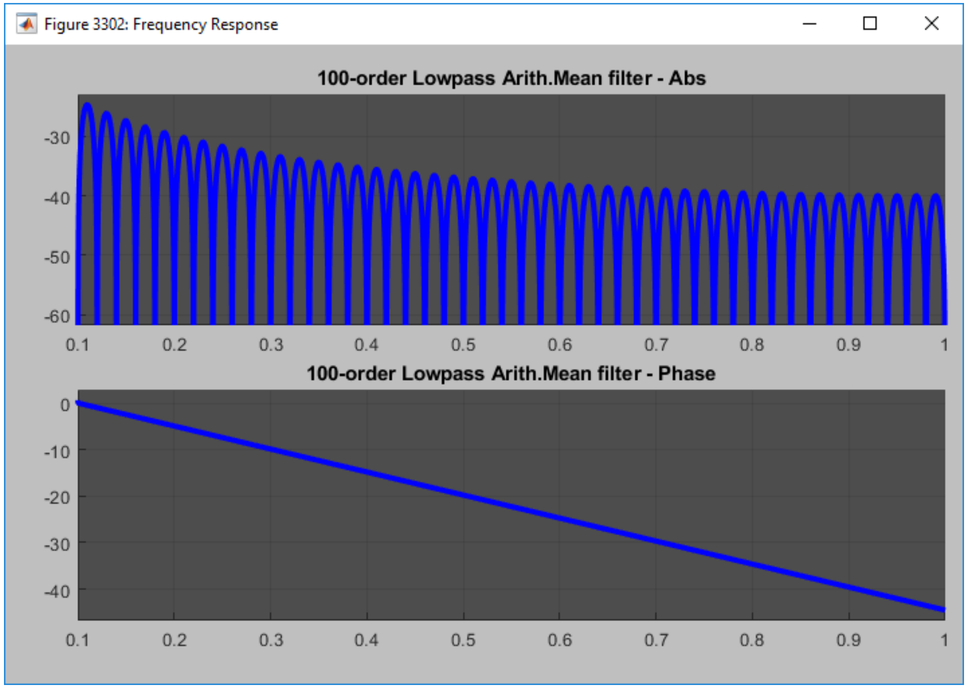
$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_N x_{t-N} \qquad \beta_i = \frac{1}{N}$$

$$y_t = \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-N+1}}{N}$$

Példa FIR szűrőre

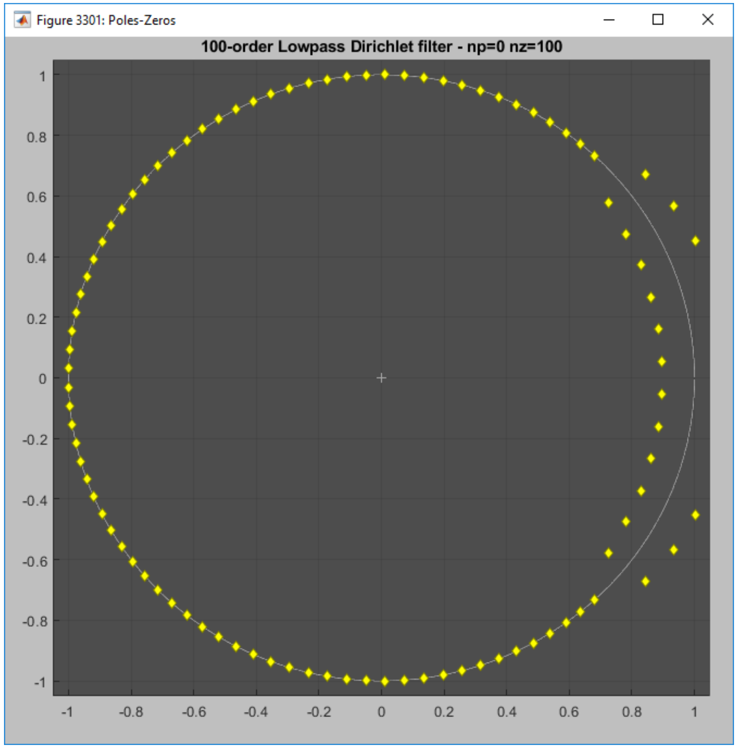
Aritmetikai átlag $N = 100$

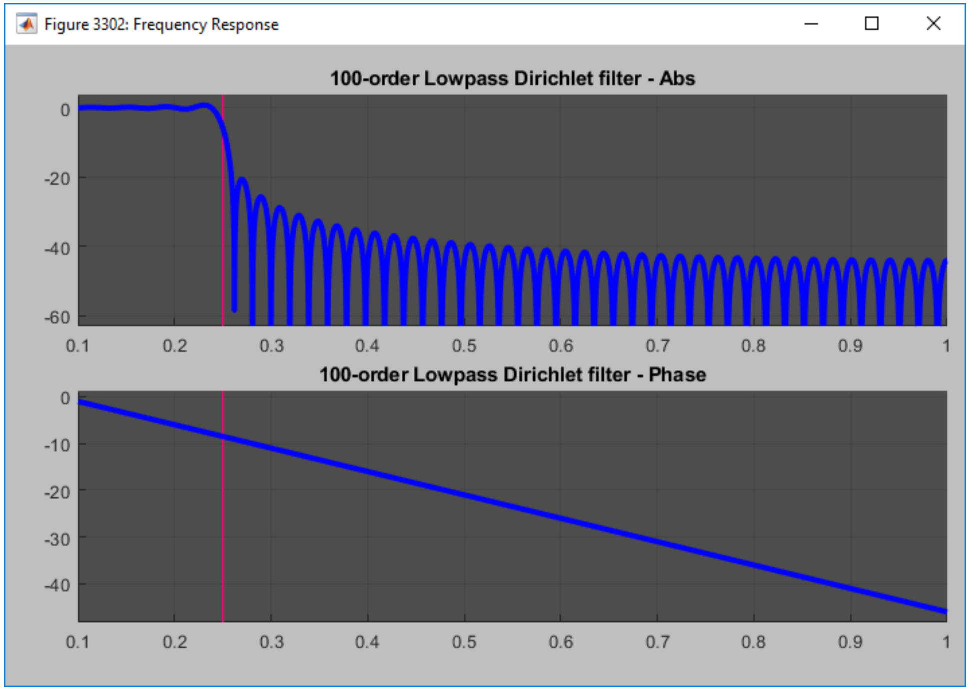


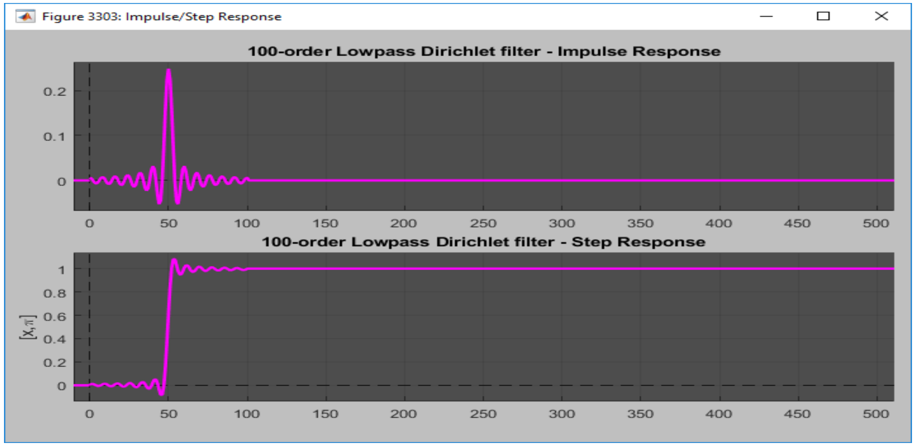


Példa FIR szűrőre

Ideális LP szűrő $N = 100$ approximációja



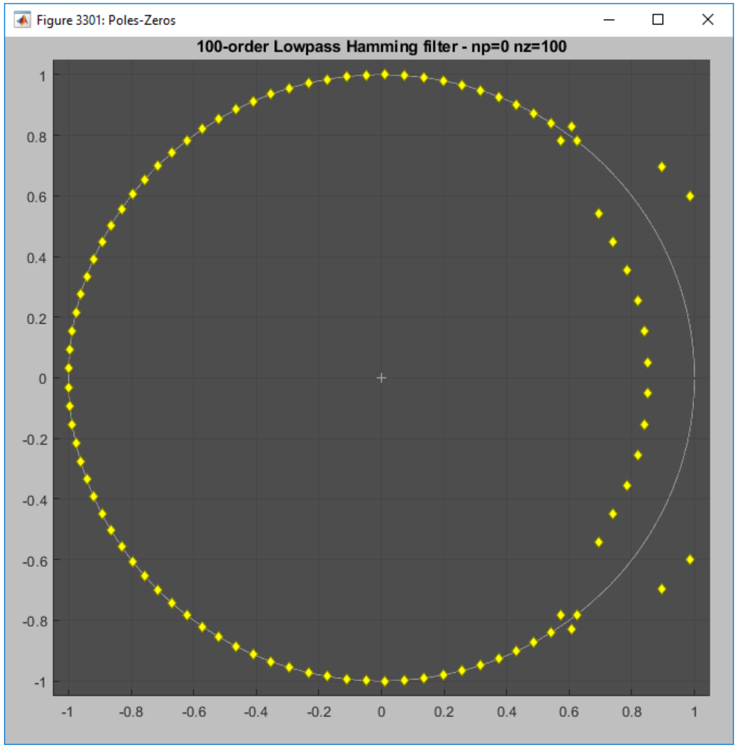


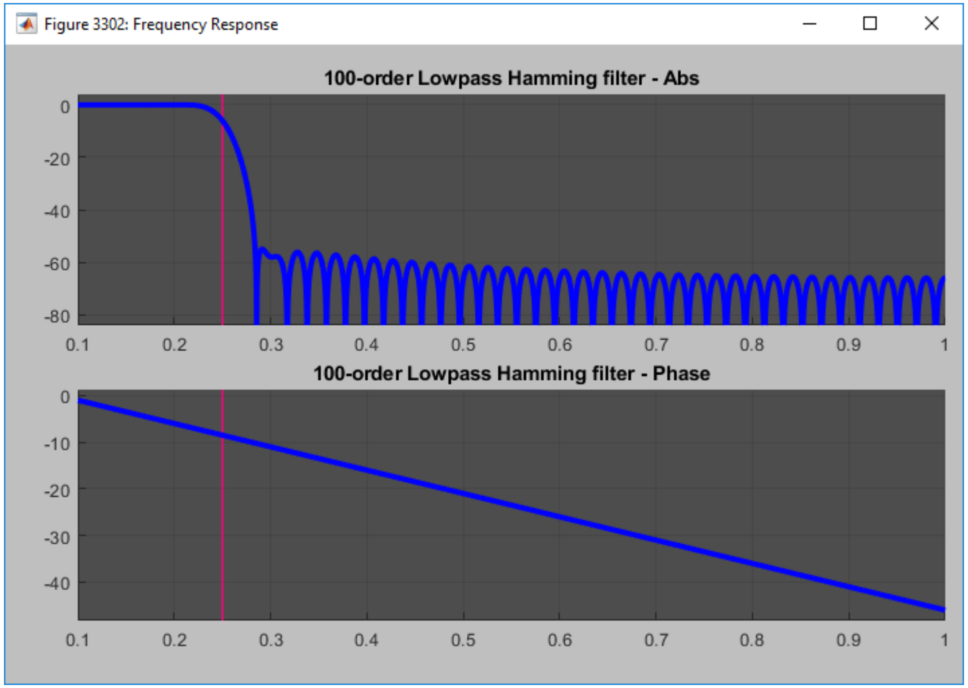


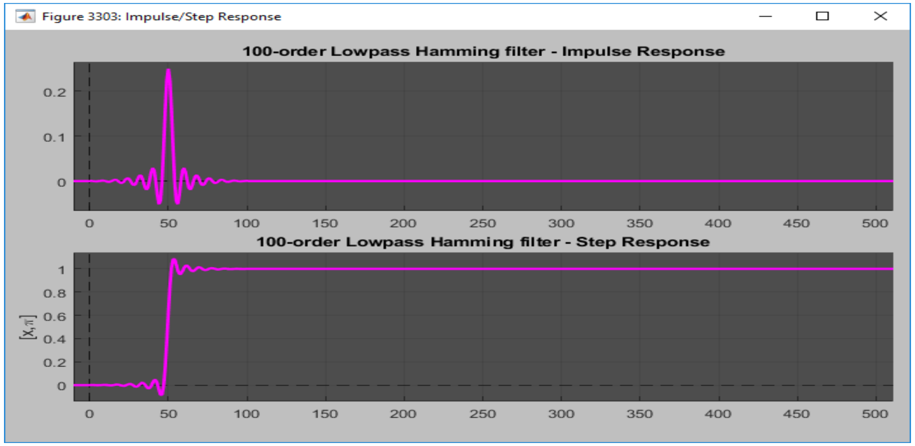
Példa FIR szűrőre

Ideális LP szűrő $N = 100$

Hamming approximációja



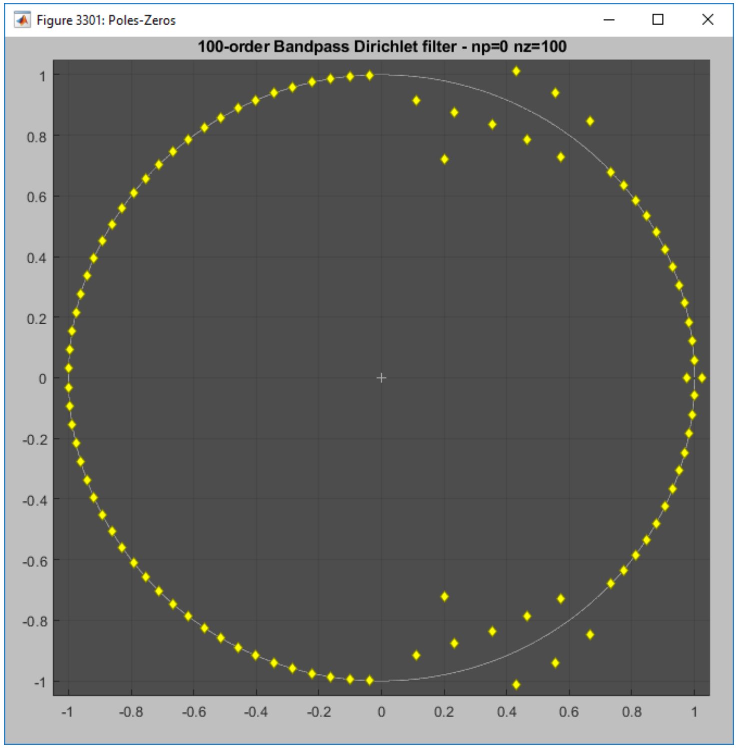


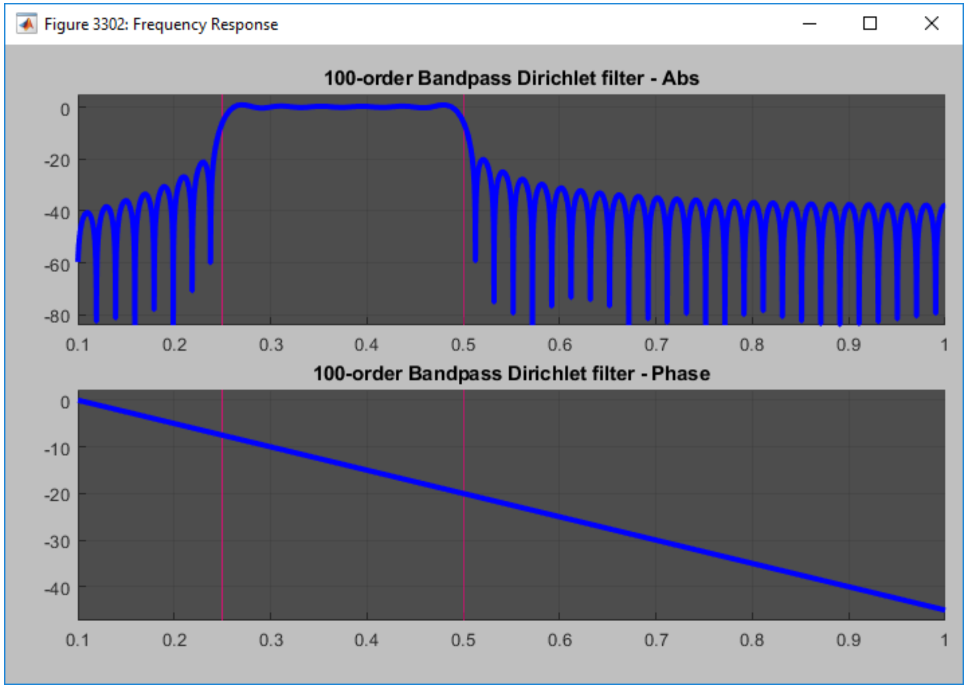


Példa FIR szűrőre

Ideális BP szűrő $N = 100$

approximációja





FIR szűrők

A FIR szűrők előnyei:

- Egyszerű szerkezet, könnyű realizálhatóság.
- Minden esetben stabil.
- Kevésbé érzékeny a kerekítési hibákra.

A FIR szűrők hátrányai:

- Az alkalmazott rend mellett kis szűrési meredekség.
- Erősen hullámzó zárótartomány.
- Késleltetés.

IIR szűrők

Végtelen impulzusválaszú (IIR — Infinite Impulse-Response) szűrők:

Általános kifejezése:

időtartományban

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_1 y_{t-1} - \cdots - \alpha_1 y_{t-1} + \\ +\beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_m x_{t-m}$$

frekvenciatartományban

$$W(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ldots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ldots + \alpha_m z^{-n}}$$

racionális törtfüggvény

Rekurzív összefüggés: valós idejű megvalósításra alkalmas.

Realizáció digitális számítógépekben:

- Különböző sémák léteznek: első- és másodrendű alaptagok kaszkád elrendezése, létrahálózat, stb.
- Optimalizálás minimális műveletszámra, tárhelyre, adatmozgatásra.

IIR szűrők tervezése

A digitális IIR szűrők tipikus típusai:

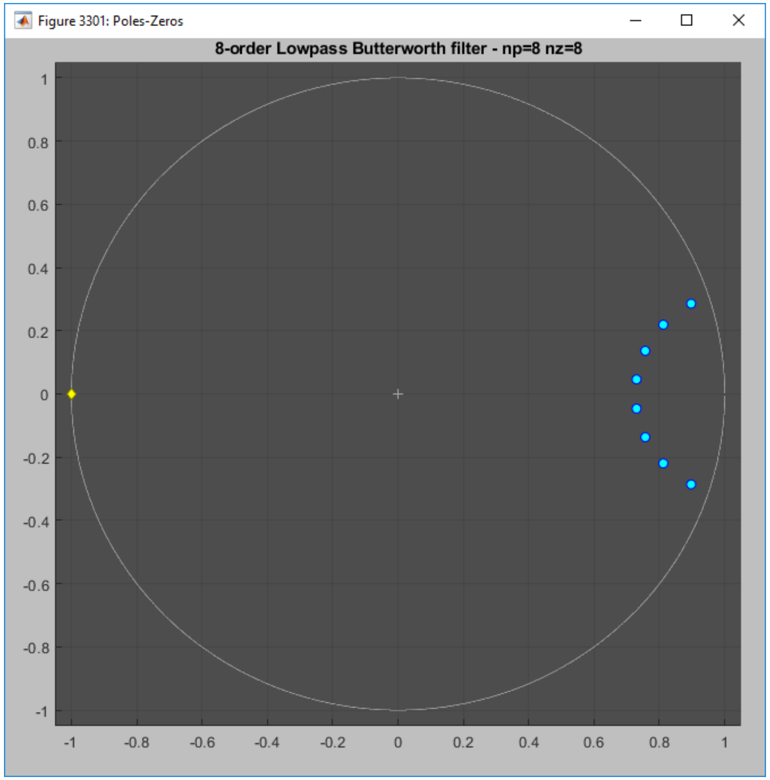
- **Butterworth** szűrő – „maximálisan lapos” karakterisztika.
- **Csebisev** szűrő – áteresztőtartományban egyenletes hullámzás.
- **Inverz Csebisev** szűrő – zárótartományban egyenletes hullámzás.
- **Elliptikus szűrő** – áteresztő- és zárótartományban egyenletes hullámzás

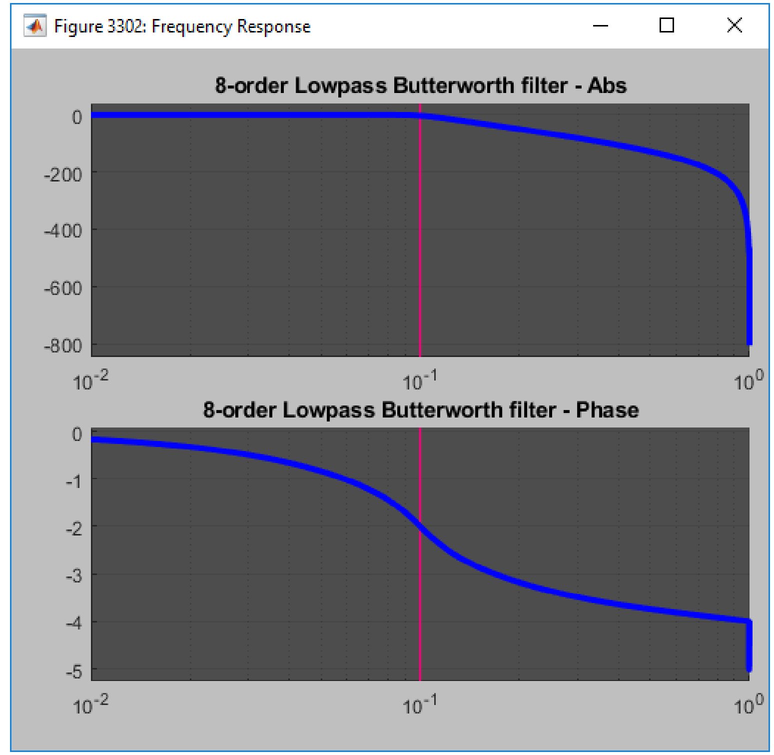
— hasonlóan az analóg szűrőkhöz

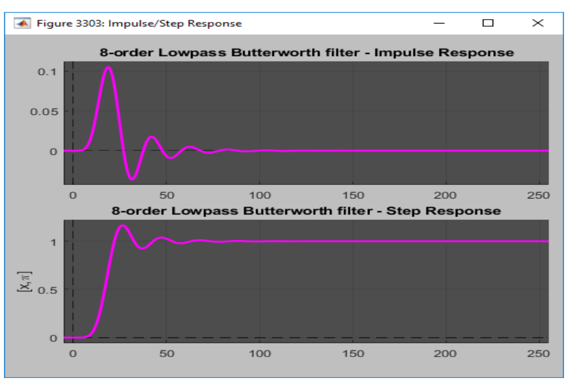
A digitális IIR tervezése:

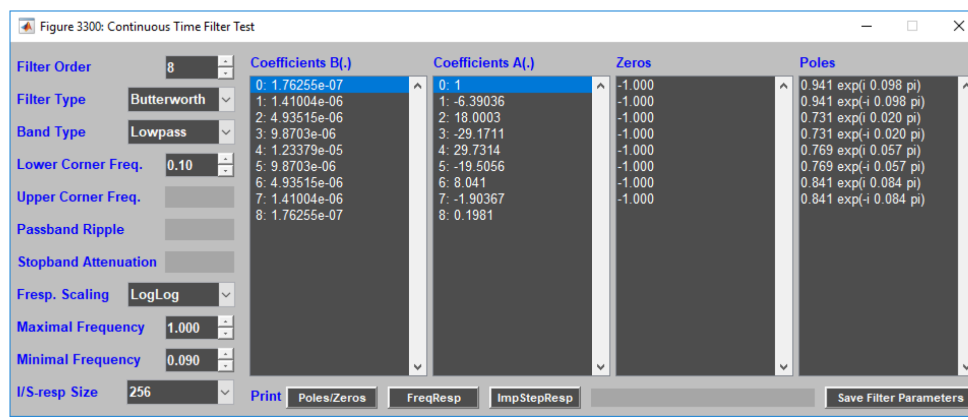
- Általában megfelelő tulajdonságú folytonos idejű szűrők diszkretizálása útján történik.
- Elvileg használható módszer a FIR szűrő racionális approximációja.
- A gyakorlatban: programok állnak rendelkezésre, pl. Matlab.

Példa IIR szűrőre: Butterworth LP

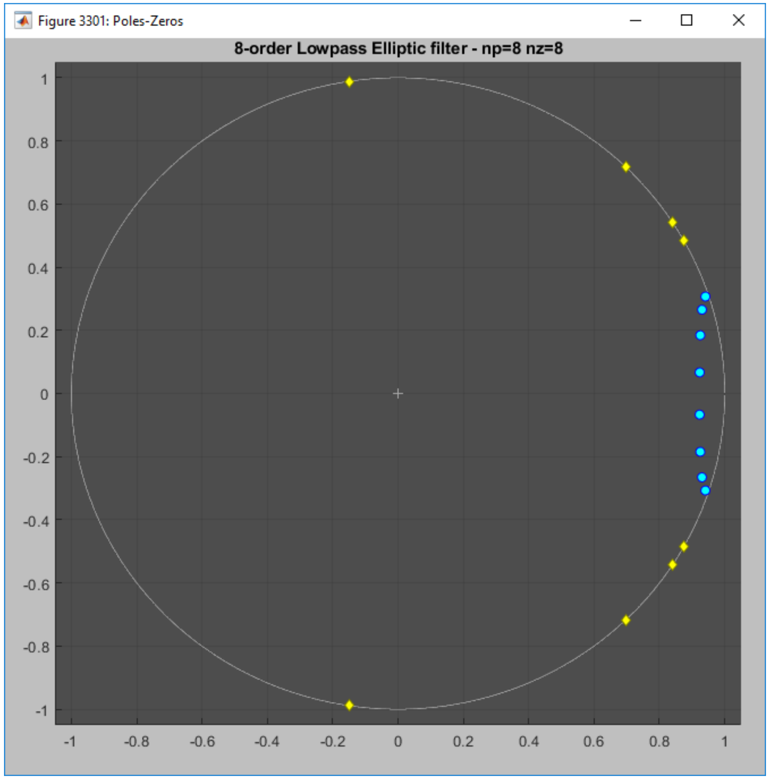


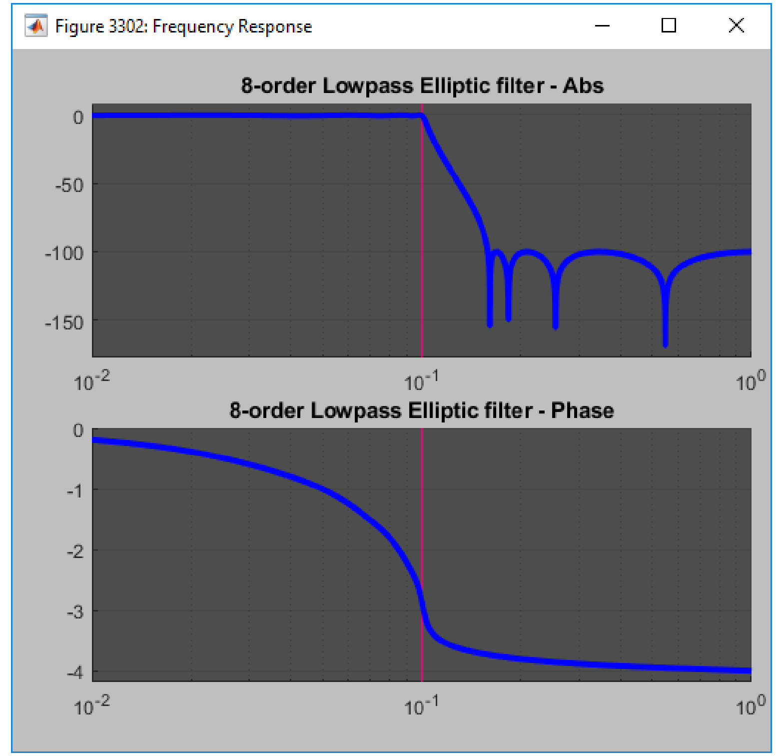


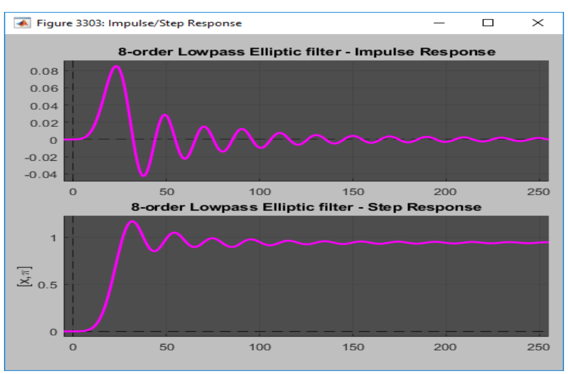


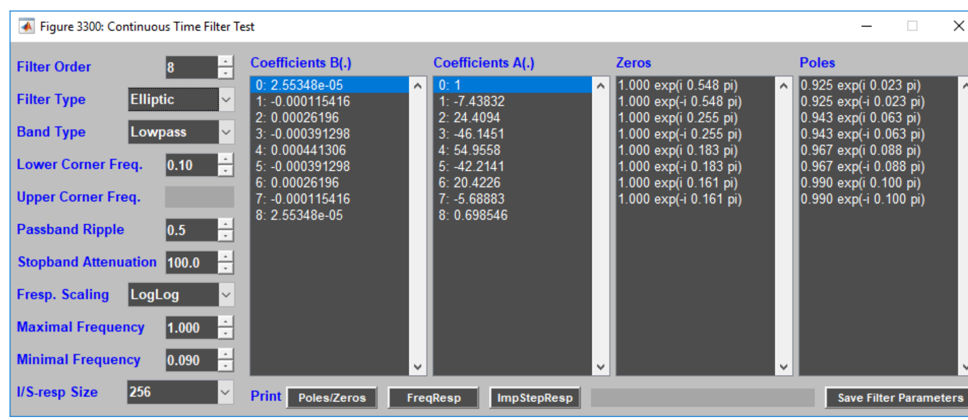


Példa IIR szűrőre: elliptikus LP









IIR szűrők

Az IIR szűrők előnyei:

- Elérhető nagy meredekség, tervezhető csillapítás és hullámzás.
- A jól megtervezett – a realizálhatósági korlátokat betartó – szűrő stabil és nem érzékeny a kerekítési hibákra.

Az IIR szűrők hátrányai:

- Realizálhatósági korlátok miatt előfordulhat instabilitás és érzékenység a kerekítési hibákra.
- Bonyolultabb szerkezet, nagyobb számítástechnikai kapacitásigény.
- Késleltetés.

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros

email: soumelidis@mail.bme.hu