ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK II.
3. DC MOTOROK
DINAMIKUS MODELLEZÉS

MŰEGYETEM 1782

Dr. Soumelidis Alexandros

2020.02.26.

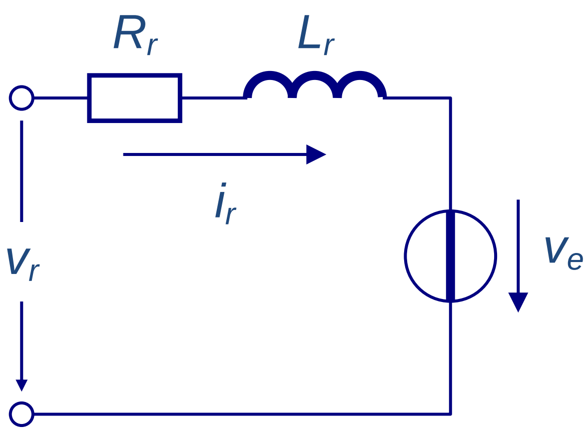
BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

A DC-motor dinamikus leírása

Villamos egyenlet

a feszültség hurokra alkalmazott Kirchoff törvény

$$L_r \frac{di_r}{dt} + R_r i_r = v_r\ (t) - k_m \omega$$



$$v_e = k_m \omega$$

- v_r - a forgórész kapocsfeszültsége
- i_r - a forgórész árama
- R_r - a forgórész villamos ellenállása
- L_r - a forgórész induktivitása
- ω - a motor fordulatszáma (szögsebesség)
- J_r - a forgórész tehetetlenségi nyomatéka
- k_m - nyomatéktényező
- μ_m - viszkózus súrlódási tényező
- v_e - elektromotoros erő – indukált feszültség
- T_m - a motor által kifejtett nyomaték

Mechanikai egyenlet:

a forgásra vonatkozó Newton törvény

$$J_r \frac{d\omega}{dt} + \mu_m \omega = k_m i_r \qquad T_m = k_m i_r$$

A DC-motor dinamikus leírása

Elsőrendű differenciálegyenlet rendszer → Állapotteres leírás

$$J_r \frac{d\omega}{dt} + \mu_m \omega = k_m i_r \qquad \frac{d}{dt}\omega = -\frac{\mu_m}{J_r}\omega + \frac{k_m}{J_r} i_r$$

$$L_r \frac{di_r}{dt} + R_r i_r = v_r\,(t) - k_m \omega \qquad \frac{d}{dt} i_r = -\frac{k_m}{L_r}\omega - \frac{R_r}{L_r} i_r + \frac{1}{L_r} v_v(t)$$

Állapotváltozók: szögsebesség és áram

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_m}{J_r} & \frac{k_m}{J_r} \\ -\frac{k_m}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix} v_r$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}}$$

A kimeneti egyenlet lehet pl.:

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix}$$

Ez esetben a kimenet: a szögsebesség

A DC-motor dinamikus leírása

Átviteli (transzfer) függvény származtatása:

A Laplace-transzformáció alkalmazása

$$J_r \frac{d\omega}{dt} + \mu_m \omega = k_m i_r \qquad (J_r s + \mu_m)\Omega(s) = k_m I_r(s)$$

$$L_r \frac{di_r}{dt} + R_r i_r = v_r\,(t) - k_m \omega \qquad (L_r s + R_r) I_r(s) = V_r(s) - k_m \Omega(s)$$

Kifejezzük $\Omega(s)$-t és $I_r(s)$-t …

A DC-motor dinamikus leírása

$$(J_r s + \mu_m)\Omega(s) = k_m I_r(s)$$

$$(L_r s + R_r)I_r(s) = V_r(s) - k_m \Omega(s)$$

Az 1. egyenletből:

$$I_r(s) = \frac{J_r s + \mu_m}{k_m}\Omega(s)$$

Behelyettesítve a 2. egyenletbe:

$$\Omega(s) = \frac{k_m}{(J_r s + \mu_m)(L_r s + R_r) + k_m^2} V_r(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{k_m}{J_r L_r s^2 + (J_r R_r + L_r \mu_m)s + R_r \mu_m + k_m^2} V_r(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{k_m}{R_r \mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r \mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r \mu_m + k_m^2} s^2} \cdot V_r(s)$$

A DC-motor dinamikus leírása

$$(J_r s + \mu_m)\Omega(s) = k_m I_r(s)$$

$$(L_r s + R_r)I_r(s) = V_r(s) - k_m\Omega(s)$$

Az 1. egyenletből:

$$\Omega(s) = \frac{k_m}{J_r s + \mu_m} I_r(s)$$

Behelyettesítve a 2. egyenletbe:

$$(L_r s + R_r)I_r(s) = V_r(s) - \frac{k_m^2}{J_r s + \mu_m} I_r(s)$$

$$I_r(s) = \frac{J_r s + \mu_m}{(J_r s + \mu_m)(L_r s + R_r) + k_m^2} V_r(s)$$

$$I_r(s) = \frac{J_r s + \mu_m}{J_r L_r s^2 + (J_r R_r + L_r \mu_m)s + R_r \mu_m + k_m^2} V_r(s)$$

$$I_r(s) = \frac{k_m}{R_r \mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1 + \frac{J_r}{\mu_m} s}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r \mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r \mu_m + k_m^2} s^2} \cdot V_r(s)$$

Átviteli függvények

A szögsebességre vonatkozó átviteli függvény:

$$W_{\Omega/V}(s) = \frac{k_m}{R_r\mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r\mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r\mu_m + k_m^2} s^2}$$

A motoráramra vonatkozó átviteli függvény:

$$W_{I/V}(s) = \frac{k_m}{R_r\mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1 + \frac{J_r}{\mu_m} s}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r\mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r\mu_m + k_m^2} s^2}$$

Az áram szoros összefüggésben van a nyomatékkal: $T_m = k_m I_r$

$$W_{T/V}(s) = \frac{k_m^2}{R_r\mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1 + \frac{J_r}{\mu_m} s}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r\mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r\mu_m + k_m^2} s^2}$$

Ω-átviteli függvény

A szögsebességre vonatkozó átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{k_m}{R_r\mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_rR_r + L_r\mu_m}{R_r\mu_m + k_m^2}s + \frac{J_rL_r}{R_r\mu_m + k_m^2}s^2}$$

Másodrendű aluláteresztő alaptag:

Erősítés (gain) – G
Törésponti frekvencia – ω_0
Csillapítás – ζ

$$W(s) = G \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

$$G = \frac{k_m}{R_r\mu_m + k_m^2} \qquad \zeta = \frac{J_rR_r + L_r\mu_m}{\sqrt{J_rR_r(R_r\mu_m + k_m^2)}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_r\mu_m + k_m^2}{J_rL_r}}$$

Az átviteli függvény pólusai

Az átviteli függvény pólusai: $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ gyökei

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm 2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0$$

Behelyettesítve a fizikai paramétereket:

$$p_{1,2} = \left(-\frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{\sqrt{J_r R_r (R_r \mu_m + k_m^2)}} \pm \sqrt{\left(\frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{\sqrt{J_r R_r (R_r \mu_m + k_m^2)}}\right)^2 - 1}\right)\sqrt{\frac{R_r \mu_m + k_m^2}{J_r L_r}}$$

$$p_{1,2} = \frac{-(J_r R_r + L_r \mu_m) \pm \sqrt{(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r}}{2 J_r L_r}$$

A pólusok lehetnek **valósak**, vagy alkothatnak **konjugált komplex párt**.

Az átviteli függvény pólusai

Valós pólusok: $(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r \geq 0$

kis átalakítás után $(J_r R_r - L_r \mu_m)^2 - 4 k_m^2 J_r L_r \geq 0$

$$p_{1,2} = \frac{-(J_r R_r + L_r \mu_m) \pm \sqrt{(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r}}{2 J_r L_r}$$

$$(J_r R_r + L_r \mu_m) > \sqrt{(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r}$$

$$(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 > (J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r$$

$$0 > -4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r$$

Negatív értékű valós pólusok: a stabilitás teljesül.

Határhelyzetben: $(J_r R_r - L_r \mu_m)^2 - 4 k_m^2 J_r L_r = 0$

kétszeres multiplicitású pólus $p_{1,2} = -\dfrac{J_r R_r + L_r \mu_m}{2 J_r L_r}$

Negatív értékű valós pólusok: a stabilitás teljesül.

Az átviteli függvény pólusai

Konjugált komplex póluspár: $(J_r R_r - L_r \mu_m)^2 - 4k_m^2 J_r L_r < 0$

$$p_{1,2} = \frac{-(J_r R_r + L_r \mu_m) \pm \mathrm{i}\sqrt{4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r - (J_r R_r + L_r \mu_m)^2}}{2 J_r L_r}$$

A pólusok valós része negatív: a stabilitás teljesül.

Valós pólusok: Konjugált komplex póluspár:

– mivel a stabilitás garantált –

aperiodikus beállás csillapodó periodikus beállás

Megjegyzés: a DC motorok fizikai kialakítása folytán a nyílthurkú átviteli függvényük függvényük pólusai a gyakorlatban *valósak*.

Példa: egy DC motor paraméterei

FAULHABER 1724 006 SR típusú motor

k_m a motorra vonatkozó nyomatéktényező $6.59 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot m}{A}$

R_r a forgórész elektromos ellenállása 3.41Ω

L_r a forgórész induktivitása $75 \cdot 10^{-6} H$

J_r a forgórész tehetetlenségi nyomatéka $1 g \cdot cm^2 = 10^{-7} kg \cdot m^2$

Számítás útján meghatározható:

μ_m a forgórész és állórész között ható viszkózus súrlódási tényező $1.9987 \cdot 10^{-9} N \cdot m \cdot s$

További jellemző adatok:

ω_{max} üresjárási (maximális) fordulatszáma $8600 rpm \cong 900 \frac{rad}{s}$

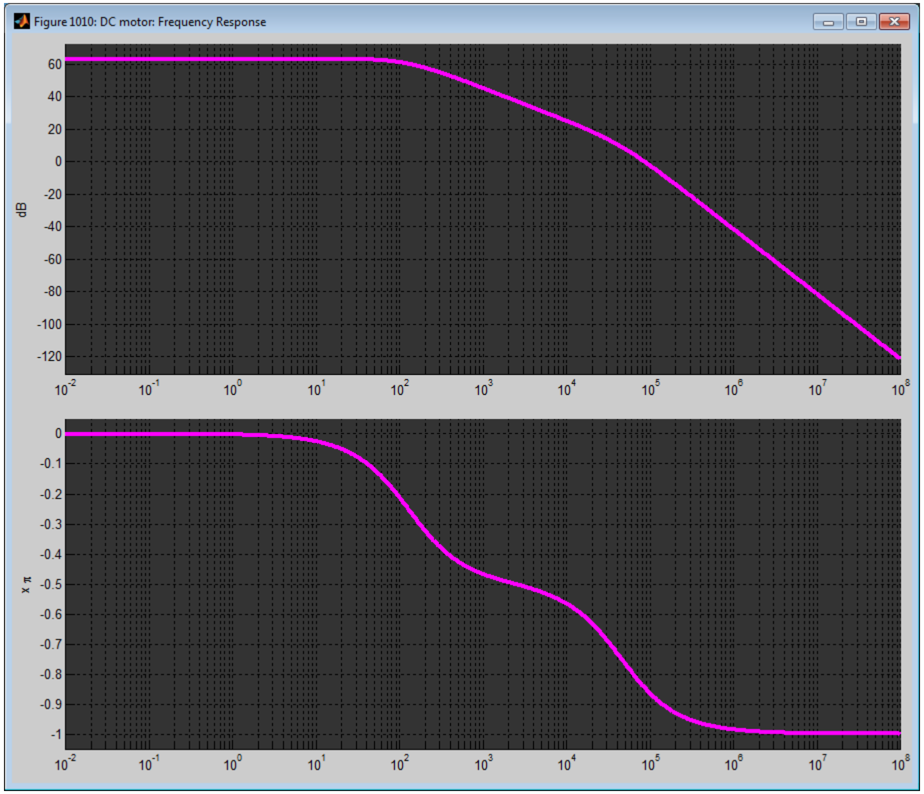
v_{nom} nominális elektromos kapocsfeszültség $6V$

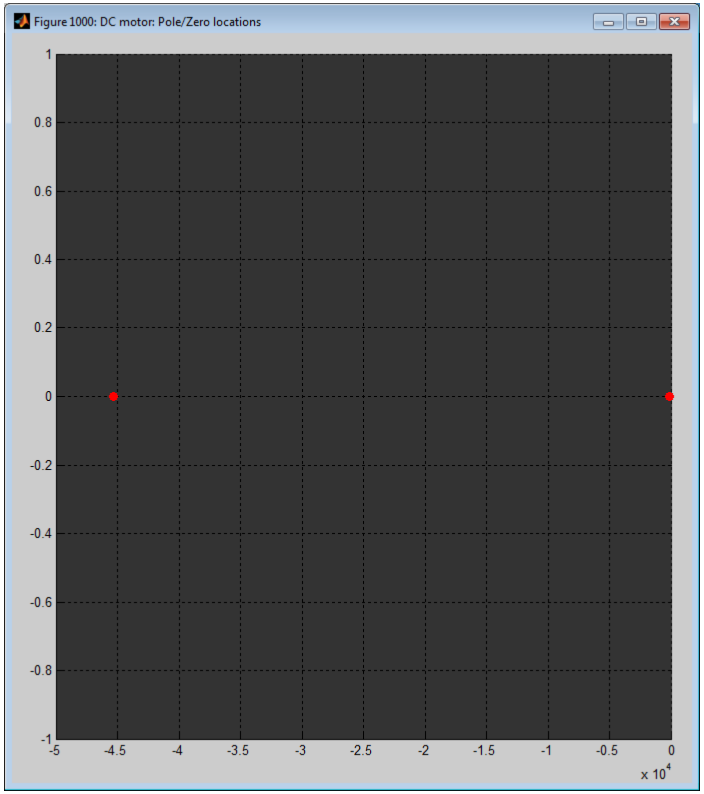
I_0 üresjárási áram $20 mA$

T_{fr} súrlódási nyomaték $0.13 mN \cdot m$

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Nominális modell: 2 valós pólus



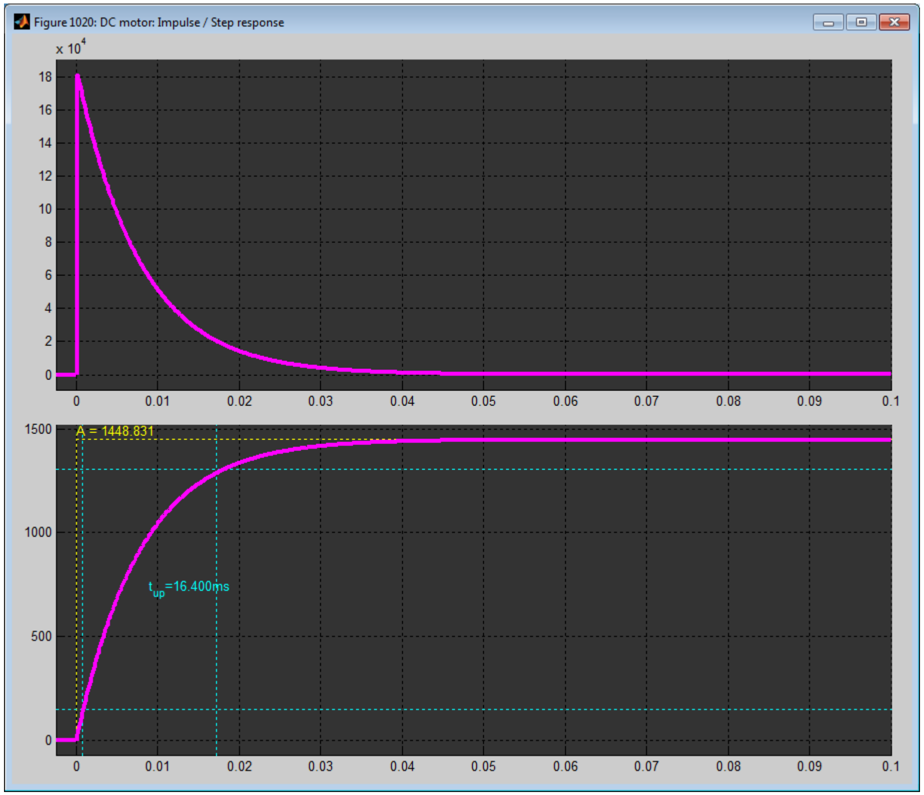


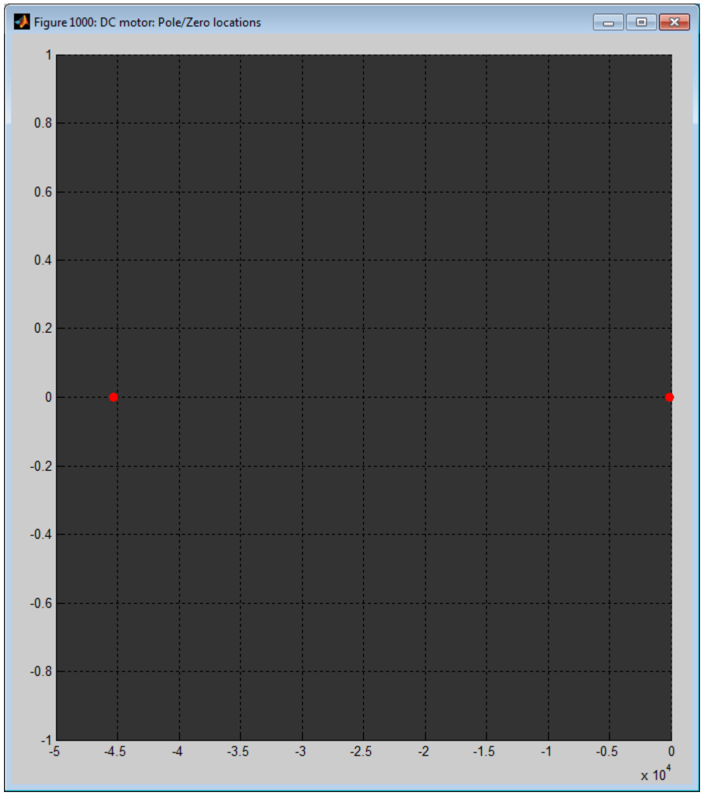
Bode diagram

Pólusok

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Nominális modell: 2 valós pólus



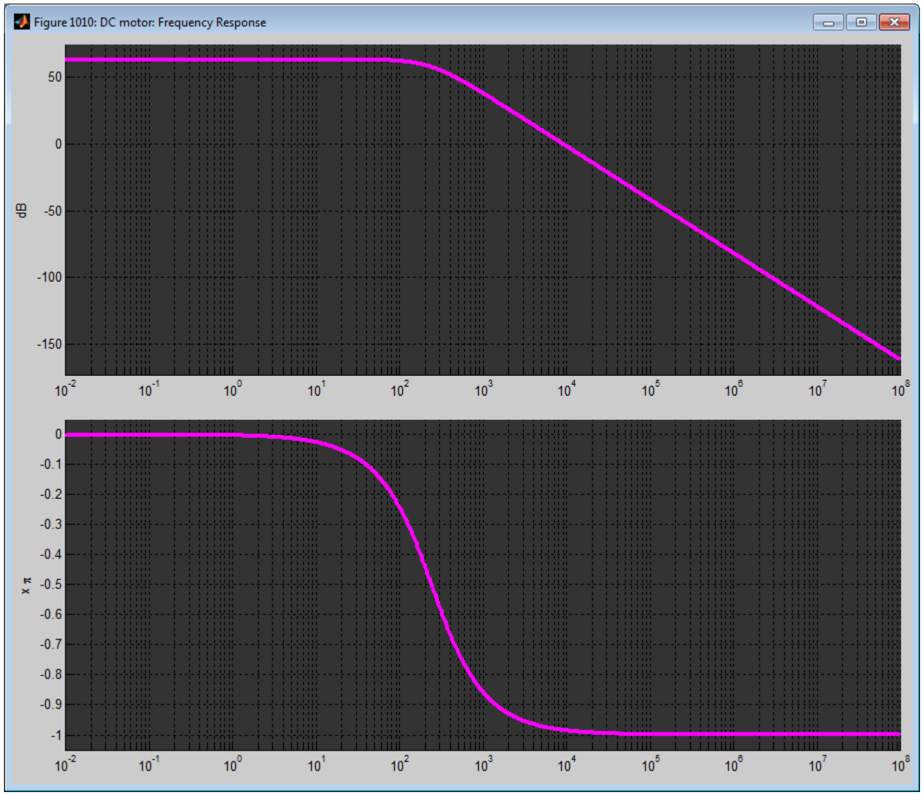


Impulzusválasz,
egységugrás-válasz

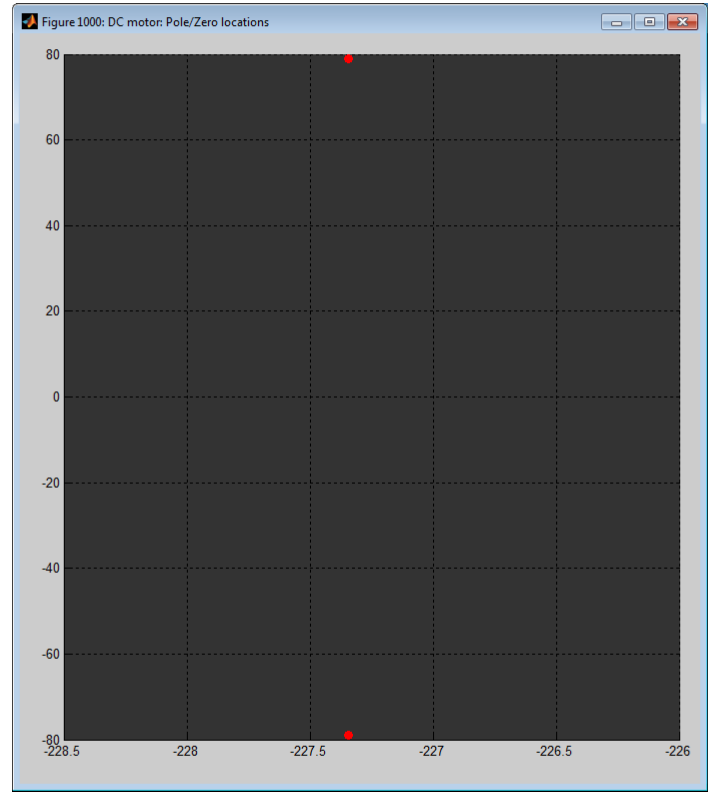
Pólusok

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Elhangolt modell (L_r x 10): konjugált komplex póluspár



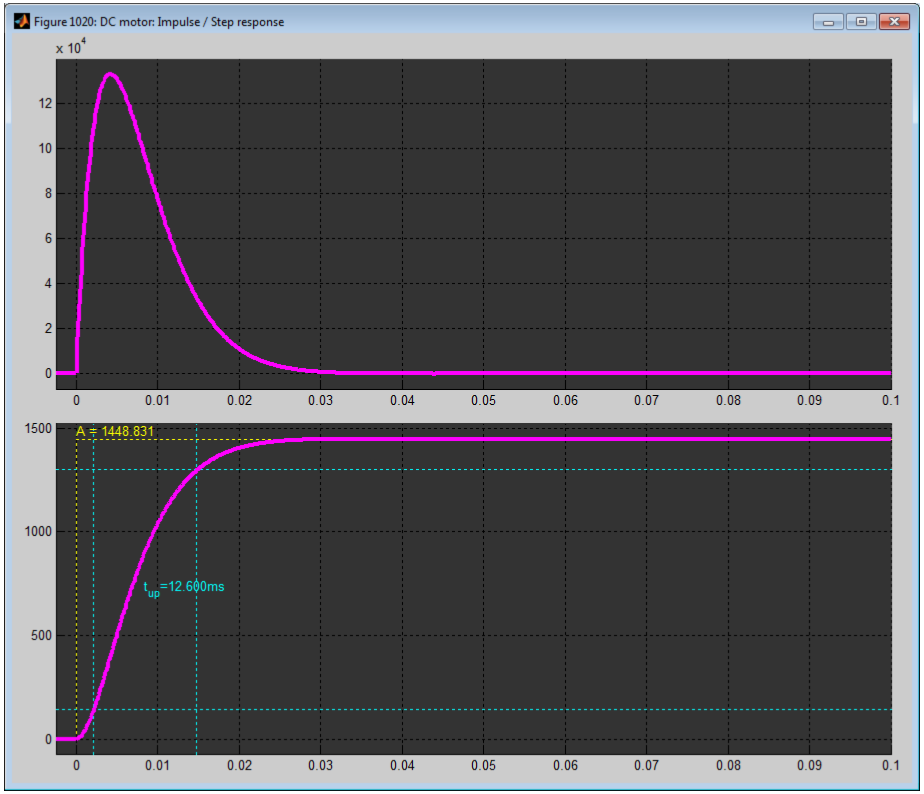
Bode diagram

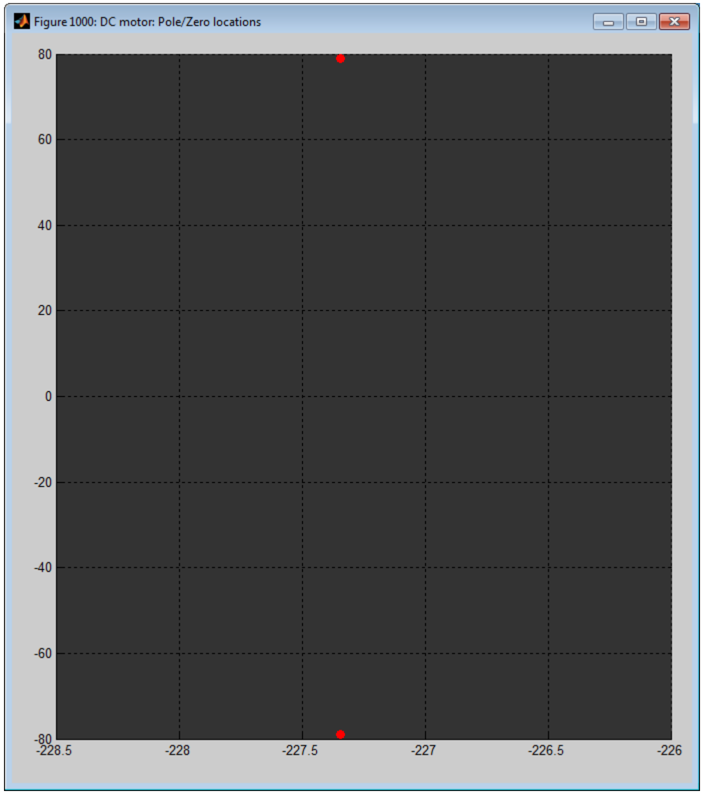


Pólusok

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Elhangolt modell (L_r x 10): konjugált komplex póluspár



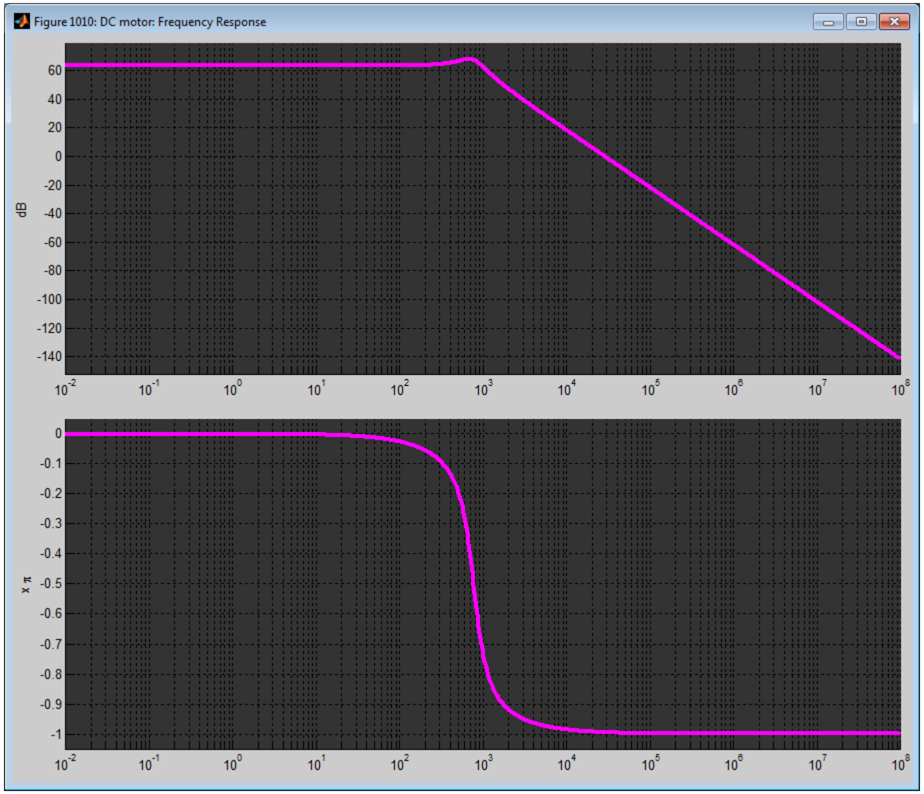


Impulzusválasz,
egységugrás-válasz

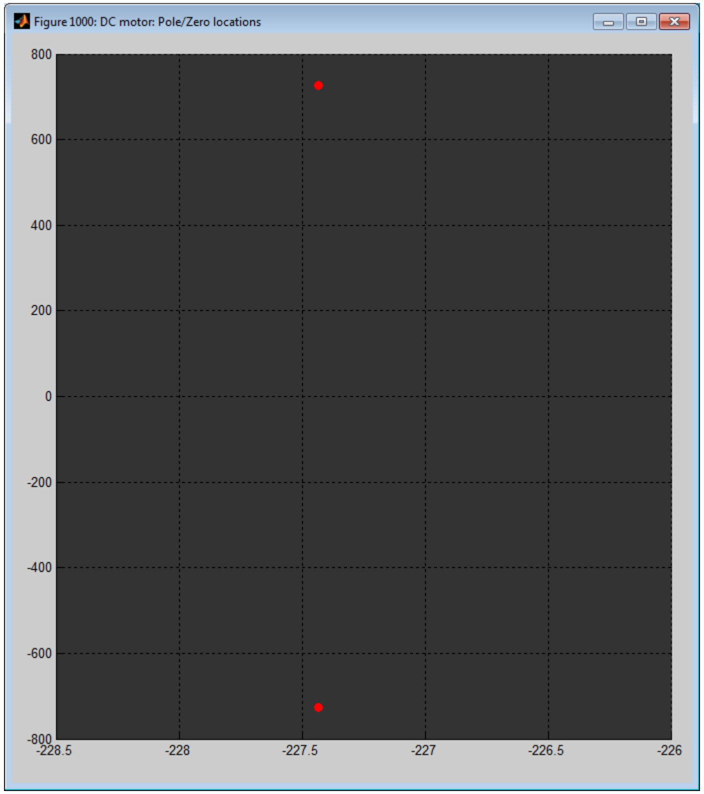
Pólusok

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Elhangolt modell (J_r / 10): konjugált komplex póluspár



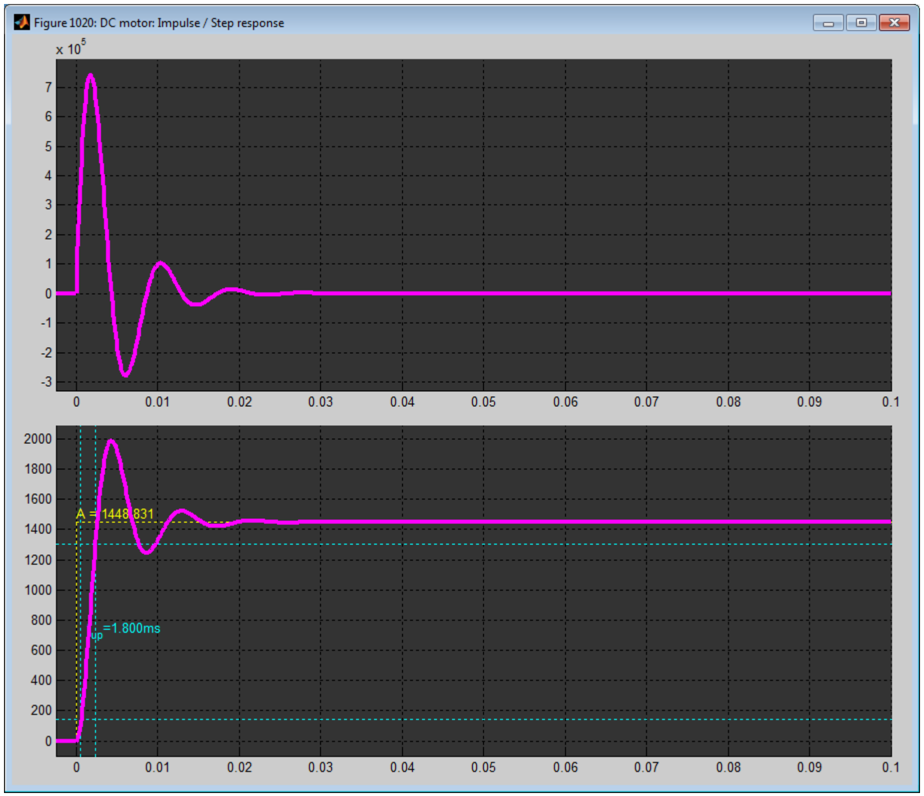
Bode diagram

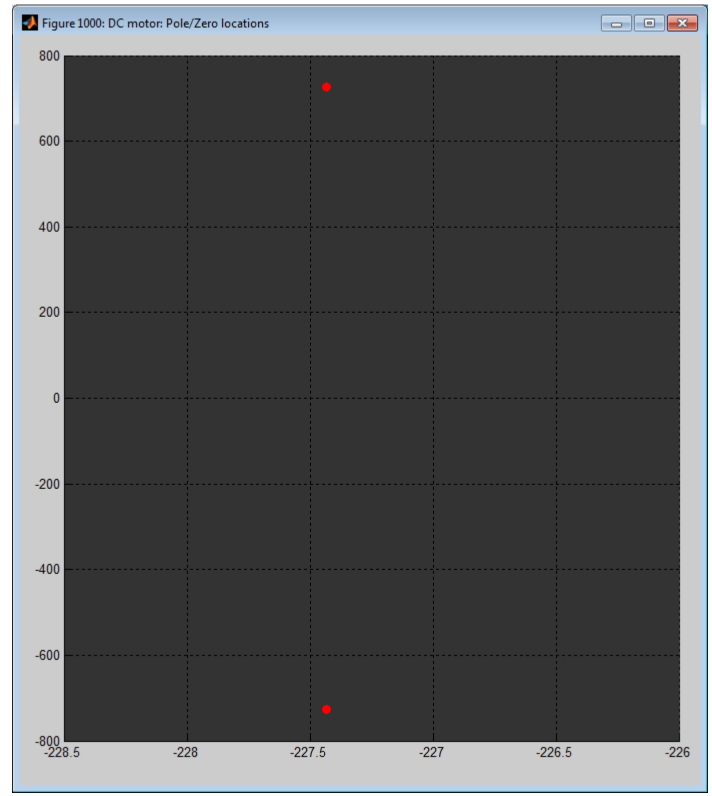


Pólusok

Példa: egy DC motor átviteli függvénye

Elhangolt modell (J_r / 10): konjugált komplex póluspár





Impulzusválasz,
egységugrás-válasz

Pólusok

A paraméterek meghatározása

Identifikáció: black-box modell alkalmazásával – mérések útján

$$W(s) = G \cdot \frac{1}{1 + bs + as^2}$$

G, a, b paraméterek becsülhetők

Mérés:

- Ismert bemeneti jellel gerjeszteni (pl. ugrás, ugrások sorozata, szinuszos, periodikus jel, stb.) és mérni a kimenetet.
- Tetszőleges bemeneti-kimeneti jelek mérése (I/O identifikáció).

Identifikációs eljárások:

- Görbeillesztés, least-square eljárások.
- AR, ARX, ARMA, ARMAX modellillesztések.
- Subspace (altér) módszerek.

⟹ pl. Matlab® System Identification Toolbox™

A paraméterek meghatározása

A fizikai paraméterek meghatározása:

$$G = \frac{k_m}{R_r\mu_m + k_m^2}$$

$k_m, \mu_m, J_r, R_r, L_r$ - 5 paraméter, 3 egyenlet

$$b = \frac{J_r R_r + L_r\mu_m}{R_r\mu_m + k_m^2}$$

R_r, L_r - katalógusadatok, ill. egyszerű módszerrel megmérhetők

$$a = \frac{J_r L_r}{R_r\mu_m + k_m^2}$$

k_m, μ_m, J_r az egyenletek megoldásaként meghatározható

A megoldás (nem részletezve):

$$k_m = \frac{L_r^2 - bL_rR_r + aR_r^2}{L_r^2 G}$$

$$\mu_m = \frac{(bL_r - aR_r)(L_r^2 - bL_rR_r + aR_r^2)}{L_r^4 G^2}$$

$$J_r = a\frac{L_r^2 - bL_rR_r + aR_r^2}{L_r^3 G^2}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros

email: soumelidis@sztaki.hu