

ÉRZÉKELŐK ÉS BEAVATKOZÓK II.

7. DC MOTOROK

SZABÁLYOZÁS – OPTIMÁLIS SZABÁLYOZÁSOK



Dr. Soumelidis Alexandros

2020.03.25.

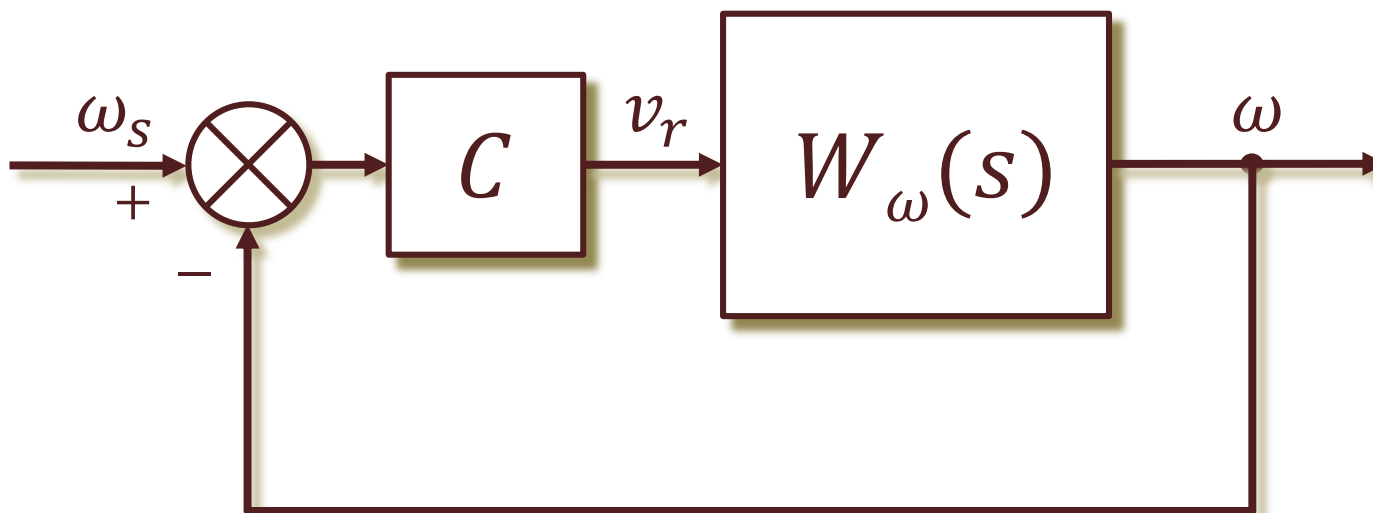


BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG

A DC motor szabályozása

Fordulatszám szabályozás

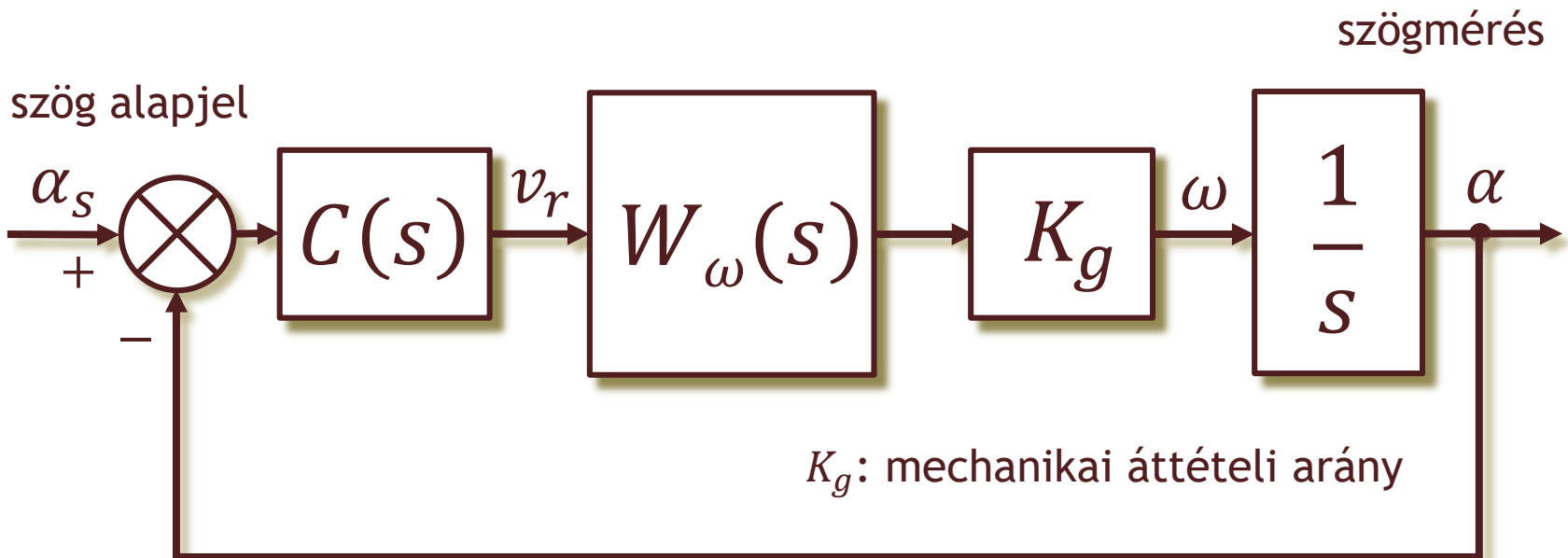
cél: a kimeneti tengely fordulatszámának beállítása egy értékre, ennek tartása / követése



A DC motor szabályozása

Szervo szabályozás

cél: a kimeneti tengely valamilyen szögbe állítása, szög tartása / követése



A DC motor szabályozása

Szabályozások tervezése:

A zárt szabályozási kör

- **stabilitásának biztosítása,**
- **minőségi kritériumok minél jobb teljesítése,**
 - a szabályozás hibájának csökkentése
 - a szabályozás gyorsítás, beállási idő csökkentése
 - túllövés, periodicitás határok között tartása, stb.

A szabályozás-tervezés egyik lehetősége:

- **optimális szabályozások megvalósítása**
 - Mi a lineáris kvadratikus (LQ) szabályozások alkalmazásával foglalkozunk.



A DC motor szabályozása

A motor alkalmazott modellje

$$\Omega(s) = \frac{k_m}{R_r \mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r \mu_m + k_m^2} s + \frac{J_r L_r}{R_r \mu_m + k_m^2} s^2} \cdot V_r(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{G}{1 + bs + as^2} \cdot V_r(s)$$

$$a\ddot{\omega} + b\dot{\omega} + \omega = Gv_r(t)$$

másodrendű lineáris
időinvariáns
differenciálegyenlet

- V_r - a motor kapocsfeszültsége
- i_r - motor (forgórész) áram
- R_r - a forgórész ohmos ellenállása
- L_r - a forgórész induktivitása
- v_e - indukált feszültség (EMF)
- J_r - a forgórész tehetetlenségi
- μ_m - viszkózus súrlódási tényező
- T_m - a motortengely nyomatéka
- ω - a motortengely szögsebessége
- k_m - a motor nyomatéktényezője



A DC motor szabályozása

Állapotteres leírás

$$a\ddot{\omega} + b\dot{\omega} + \omega = Gv_r(t)$$

Másodrendű differenciálegyenlet:
az állapottér 2-dimenziós lehet

Állapotváltozók:

ω és $\dot{\omega}$, jelöljük x_1 - és x_2 -vel.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a}\omega - \frac{b}{a}\dot{\omega} + Gv_r$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 + Gv_r$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 + Gv_r$$

+ a kimeneti egyenlet:

$$y = x_1$$



A DC motor szabályozása

Állapotteres leírás

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 + Gv_r$$

$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} v_r$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ez egy un. irányíthatósági kanonikus forma.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

(A, B, C, D)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

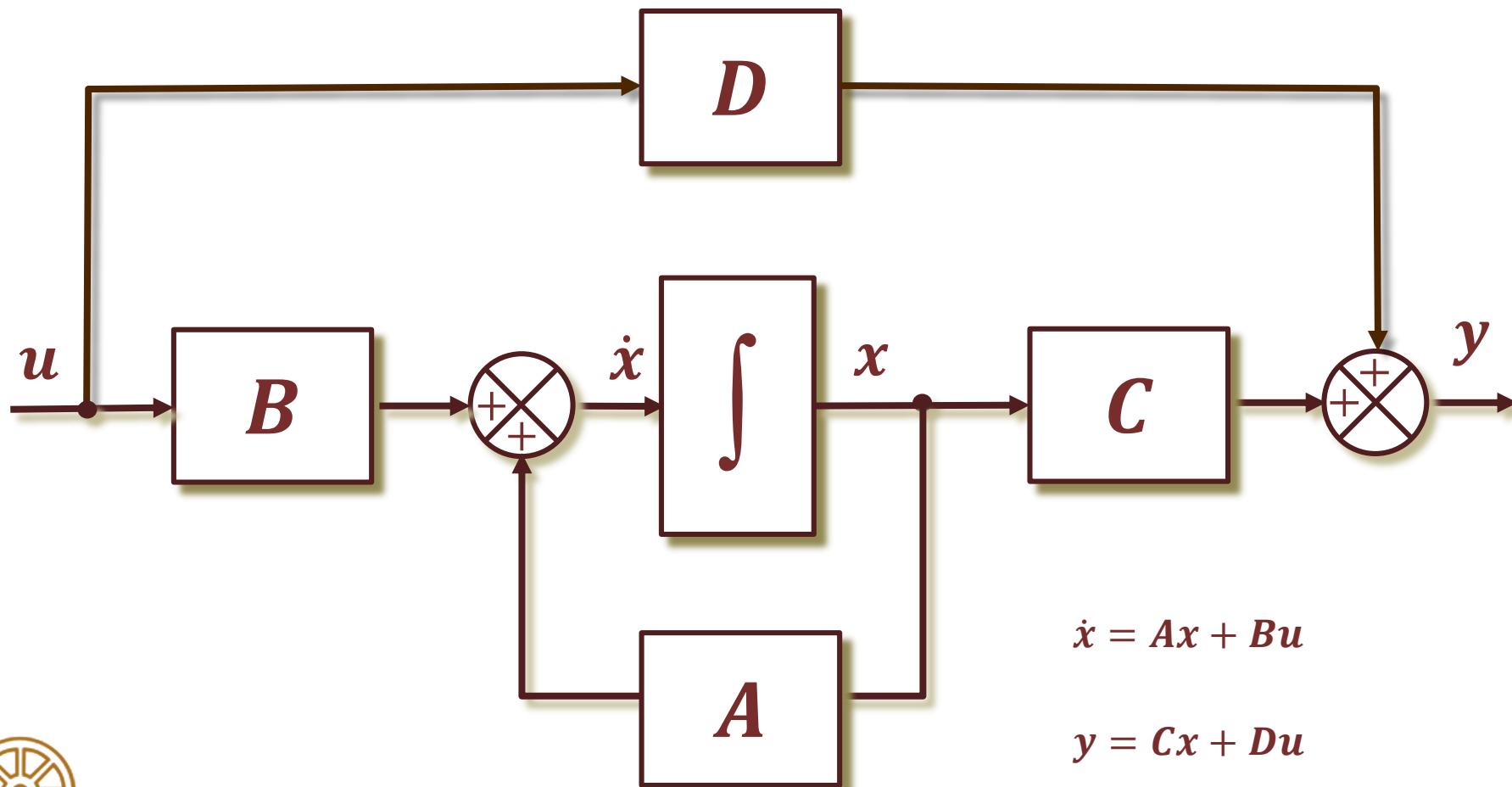
$$C = [1 \quad 0]$$

$$D = 0$$



A DC motor szabályozása

Az állapotteres leírás általános sémája



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

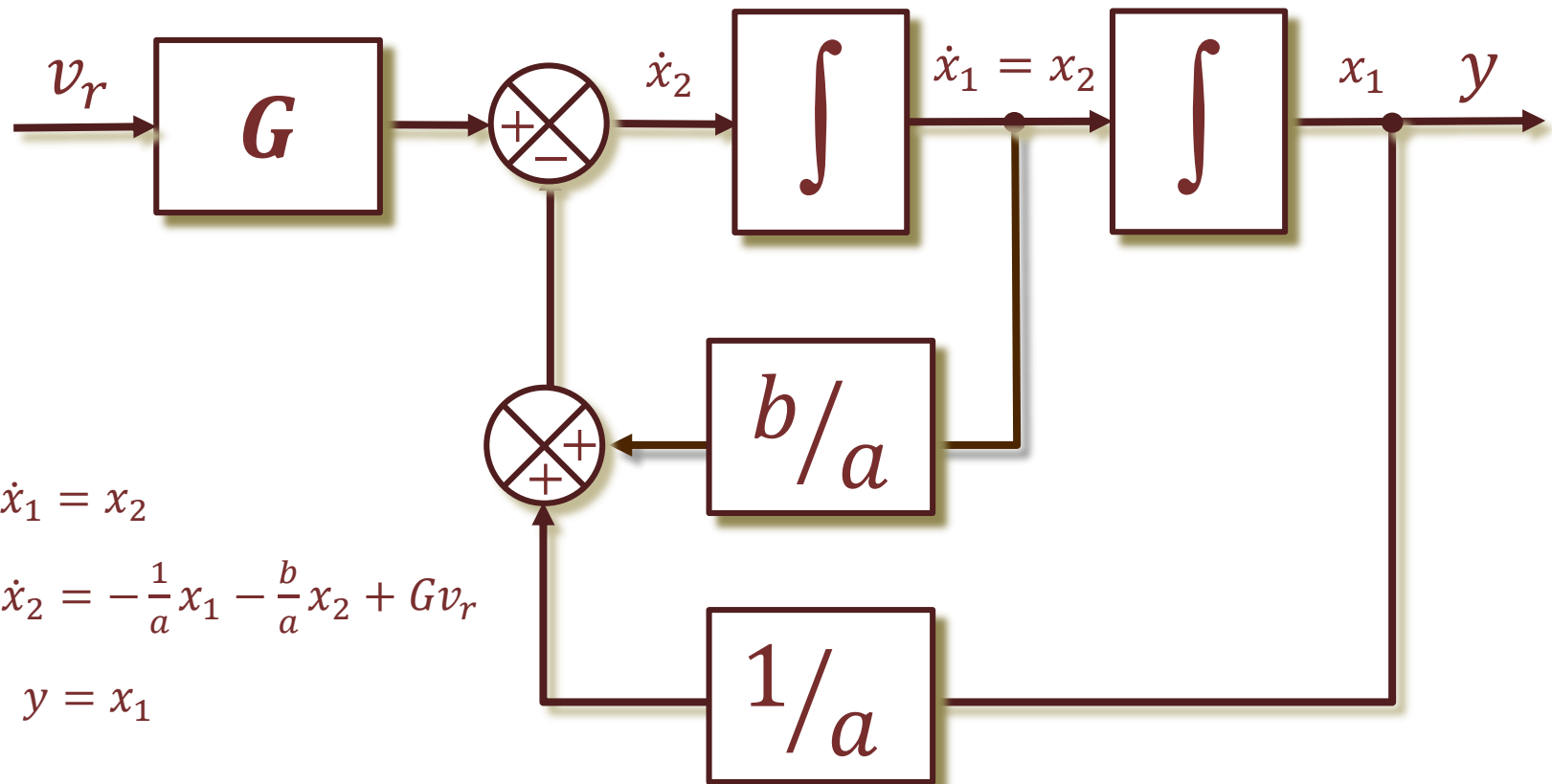
$$y = Cx + Du$$



A DC motor szabályozása

Az irányíthatósági kanonikus forma sémája

a DC motor modelljére alkalmazva



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 + Gv_r$$

$$y = x_1$$



A DC szervo modell

Állapotteres forma

$\alpha = \dot{\omega}$ bevezetése

$$a\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + \alpha = Gv_r(t)$$

3-rendű differenciálegyenlet:
3-dimenziós állapottérrel írható le

Állapotváltozók: α , $\dot{\alpha}$ és $\ddot{\alpha}$, jelölésük x_1 , x_2 és x_3 .

$$\text{Általánosabb formában: } a\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + c\dot{\alpha} + d\alpha = Gv_r(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (c = 1, d = 0)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{d}{a}x_1 - \frac{c}{a}x_2 - \frac{b}{a}x_3 + Gv_r$$

+ a kimeneti egyenlet:

$$y = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{a}x_2 - \frac{b}{a}x_3 + Gv_r$$

$$y = x_1$$



A DC szervo modell

Állapotteres forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} v_r$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Az állapotváltozók

α a motor tengelyének szöghelyzete – mért változó

ω a motortengely forgási szögsebessége – mérhető

β a motortengely szöggyorsulása – nem mért



DC szervo szabályozás

Irányíthatóság: $[B : AB : A^2B]$ számítása

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} B \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ G \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} AB \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ G \\ -\frac{b}{a}G \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} A^2 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{b}{a^2} & -\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a^2} \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} B \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ G \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} A^2B \\ \left[\begin{array}{c} G \\ -\frac{b}{a}G \\ \left(-\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)G \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$[B : AB : A^2B] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{b}{a} \\ 1 & -\frac{b}{a} & -\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a^2} \end{array} \right] G$$

Az együttható mátrix teljes rangú, mivel a determinánusa

$$D = \left(-\frac{1}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{b^2}{a^2} = -1$$

a rendszer **irányítható**.



Állapot-visszacsatolás

Ha minden állapotváltozót mérünk,
teljes állapot-visszacsatolás alkalmazható.

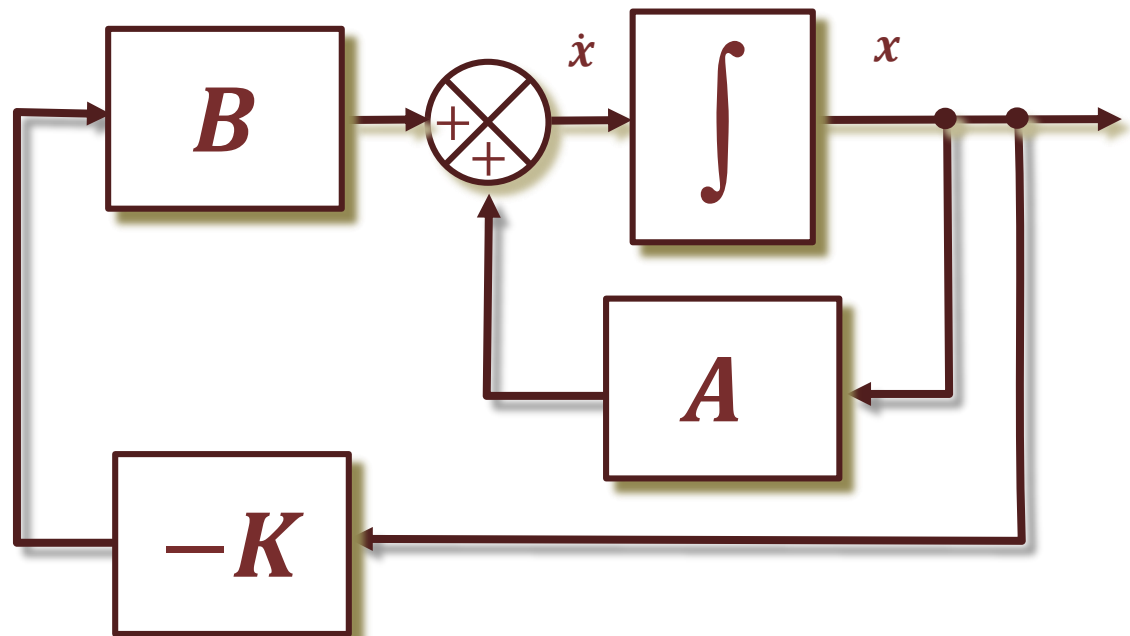
Ha a rendszer irányítható, állapot-visszacsatolás által
pólusai tetszőlegesen áthelyezhető a stabilitási tartományon belül.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx$$

ezzel

$$\dot{x} = (A - BK)x$$



Állapot-visszacsatolás

Pólus-allokáció: a rendszer pólusainak áthelyezése előre meghatározott pozícióba a stabilitási tartományon belül.

A nyílthurkú rendszer pólusai: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$

n az állapotter dimenziója

$\{p_i\}$, az A együttható mátrix sajátértékei, azaz azonosak a $|sI - A| = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeivel.

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Legyenek a kívánt pólus-pozíciók: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$



Állapot-visszacsatolás

Az ennek eléréséhez szükséges K visszacsatolás:

$$K = [\alpha_n - a_n \ : \ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \ : \ \dots \ : \ \alpha_2 - a_2 \ : \ \alpha_1 - a_1]$$

Egy alternatív módszer a megfelelő K visszacsatolás meghatározására: az *Ackermann* formula alkalmazása:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^n B]^{-1} \Phi(A)$$

ahol

$$\Phi(A) = \alpha_n I + \alpha_{n-1} A + \alpha_{n-2} A^2 + \dots + \alpha_1 A^{n-1} + A^{n-1}$$

egy nemzérus karakterisztikus polinom.



Állapot-visszacsatolás

Egy Matlab® megoldás

place

$K = \text{place}(A, B, p)$,p' a kívánt pólus pozíciók – egy valós számokat és konjugált komplex párokat tartalmazó vektor

$[K, \text{prec}, \text{message}] = \text{place}(A, B, p)$

,prec' a pólus-allokáció pontossága – ha a pontosság kisebb, mint 10%,
,message' egy figyelmeztető üzenetet tartalmaz.



LQ szabályozótervezés

Optimális szabályozó tervezés: lineáris kvadratikus (LQ - Linear Quadratic) szabályozó tervezés

Határozzuk meg K -t olyan módon, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\mathbf{x} \end{aligned} \quad J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

J kvadratikus költségfüggvényt minimalizáljuk.

Q és R pozitív definit súlyozó mátrixok.

Q , R tetszőlegesen választhatók, azonban nagy hatásuk van a megoldásra, ezzel a zárt kör minőségére.



LQ szabályozótervezés

A Q és R súlyozó mátrixok meghatározásának nincsenek egyértelmű, szisztematikusan követhető szabályai.

A Q és R súlyozó mátrixok meghatározásánál figyelembe kell vennünk a rendszer fizikai tulajdonságait,

- a rendszer nyílthurkú viselkedését, továbbá
- a kívánt zárthurkú működési tulajdonságokat.

Alapvetően értékelnünk kell, hogy az egyes állapotváltozók és a bemeneti változók milyen súllyal vegyenek részt a szabályozás megvalósításában (Q és R főátlójában levő súlyok).

Emellett meg kell ítélni, az egyes jelek kölcsönhatásainak súlyát a megoldásban (Q és R főátlón kívüli elemei).



LQ szabályozótervezés

A kvadratikus optimális szabályozási feladat megoldása:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^* \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt$$

A minimumot egy algebrai mátrix-Riccati egyenlet megoldásaként kapjuk meg:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^* \mathbf{S})$$

Egy Matlab[®] megoldás – **lqr**

$$[\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{e}] = \text{LQR}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

,S' a Riccati egyenlet megoldása,
,e' tartalmazza a zárt rendszer
megoldáshoz tartozó pólusait



Állapot-megfigyelő tervezés

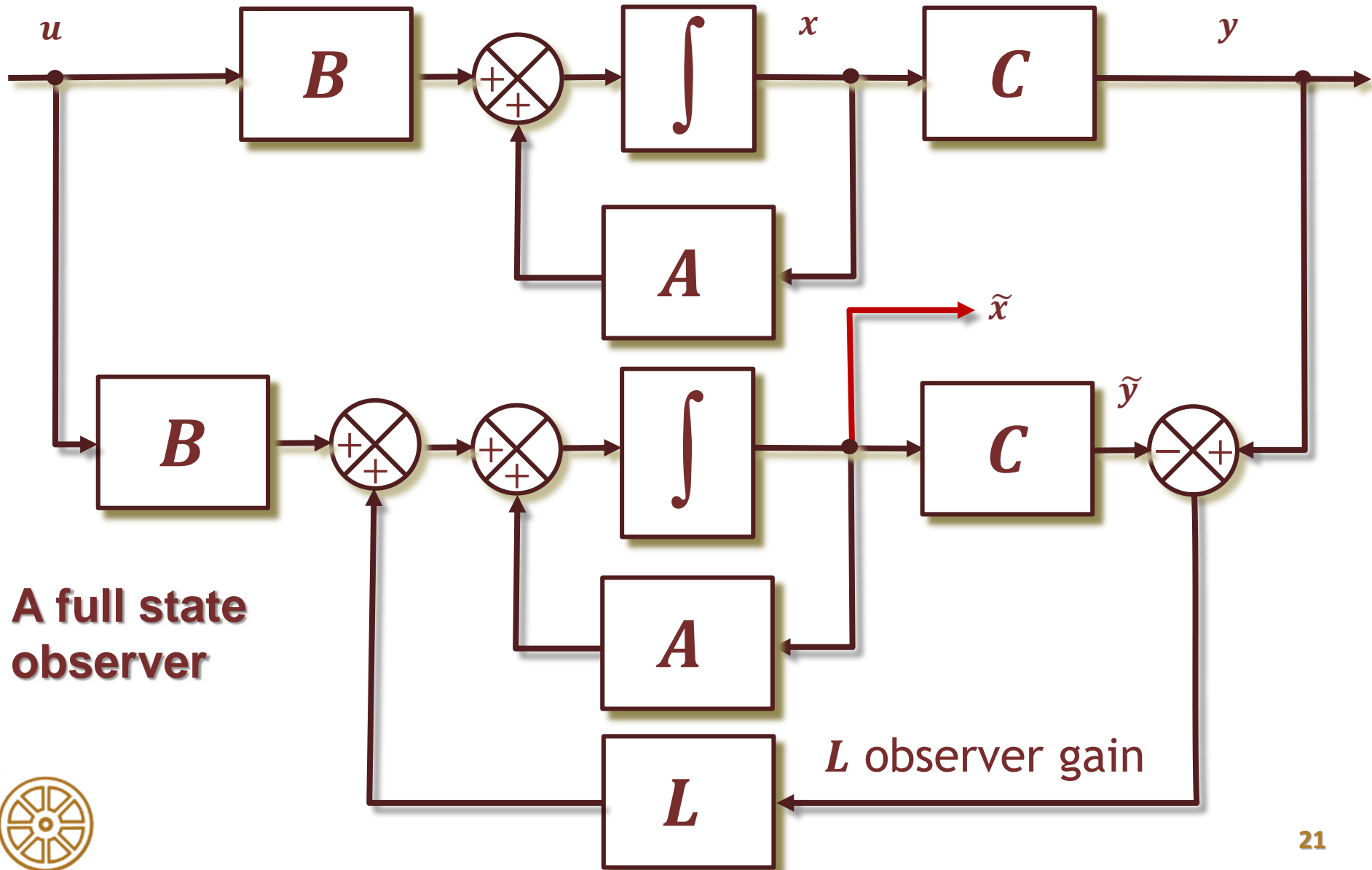
Ha a rendszer állapota nem teljes mértékben ismert (mért) **állapot-megfigyelő** alkalmazására van szükség.

Alapelv:

- A rendszer állapotteres modellje segítségével, a bemeneti jelek ismeretében becsüljük a kimeneti jelek értékét.
- Korrekciós mechanizmust (visszacsatolást) alkalmazunk a valós és a becsült kimeneti jelek közti különbségek minimalizálására.



Állapot-megfigyelő tervezés



Állapot-megfigyelő tervezés

Megfigyelő tervezés: lineáris kvadratikus optimalizálás.

- Kálmán becslő (szűrő) tervezés.
- Az állapot-visszacsatolás tervezés duális problémája.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \quad E[ww'] = Q \quad E[vv'] = R$$

$$y = Cx + Du + v \quad \text{Zaj-kovariancia mátrixok}$$

G pozitív definit súlyozó mátrix

$$\dot{x}_e = Ax_e + Bu + L(y - Cx_e - Du) \quad x_e \text{ a becsült állapot}$$

Az optimális L Kálmán erősítési mátrix meghatározása:
a megfelelő Riccati egyenlet megoldásaként

$$AP + PA^* - PC^*R^{-1}CP + GQG^* = 0 \quad L = R^{-1}(PC^*)$$



Állapot-megfigyelő tervezés

Egy Matlab[®] megoldás – **lqe**

$[L,P,e] = \text{lqe}(A,G,Q,R)$

,P' a Riccati egyenlet megoldása,
,e' tartalmazza az $A - LC$ mátrix sajátértékeit



Állapot-visszacsatolás megfigyelővel

Alkalmazzuk a megfigyelt állapotot az állapot-visszacsatolásban.

A szabályozó kifejezése egységes formában Matlab[®] környezetben:

```
sys = ss(A,B,C,D);  
[Ac,Bc,Cc,Dc] = reg(sys,K,L);
```

(Ac,Bc,Cc,Dc) a szabályozó állapotteres alakban kifejezve.

Digitális (mikroszámítógépes) realizáció érdekében a mintavételi periódusidő alkalmazásával meg kell határoznunk a szabályozó **diszkrét idejű** alakját.



Diszkrét idejű szabályozó tervezés

Matlab® megoldás

Folytonos idejű
rendszermodell



Folytonos idejű
szabályozó tervezés



A szabályozó
diszkretizálása



Folytonos idejű
rendszermodell



A modell
diszkretizálása



Diszkrét idejű
szabályozó tervezés



A diszkrét idejű szabályozó kifejezése
differenciaegyenletek formájában



Diszkretizálás

Diszkrét idejű átviteli függvény előállítása folytonos idejű átviteli függvényből:

$$W(s) = W_z(e^{sT})$$

T – mintavételi periódus

$$z = e^{sT}$$

illetve

$$s = \frac{\ln z}{T}$$

Példa:

$$W(s) = \frac{1 + b_1 s}{1 + a_1 s} = \frac{1 + \frac{b_1}{T} \ln z}{1 + \frac{a_1}{T} \ln z}$$

Ezt nem tudjuk egzakt módon racionális törtfüggvénnyé alakítani

⇒ közelítések.



Diszkretizálás

1. közelítés:

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$$

$$z = 1 - u \quad \longrightarrow \quad u = z - 1$$

$$\ln(z) = z - 1 - \frac{(z - 1)^2}{2} + \frac{(z - 1)^3}{3} - \frac{(z - 1)^4}{4} + \dots$$

Lineáris közelítés: $\ln z \approx z - 1$

z negatív hatványaival kifejezve: $\frac{1}{z^{-1}} - 1 = \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}}$

Tehát

$$s = \frac{\ln z}{T} \approx \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}}$$



Diszkretizálás

$$s = \frac{\ln z}{T} \approx \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}}$$

Értelmezése:

$$\frac{1 - z^{-1}}{T} \longrightarrow \frac{x_k - x_{k-1}}{T}$$

Ez a differenciálhányados legegyszerűbb *diszkrét* közelítése - differenciahányados

$1/z^{-1} = z$ -vel szorzás hatása:

$$z \frac{1 - z^{-1}}{T} \longrightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$$

Eltolás balra - előre menő differenciahányados.



Diszkretizálás

2. közelítés: lánc tört forma

$$\ln(1 + u) = \frac{u}{1 + \frac{u}{2 + \frac{u}{3 + \frac{4u}{4 + \frac{4u}{5 + \frac{9u}{6 + \dots}}}}}}$$

Elsőrendű közelítés:

$$\ln(1 + u) \approx \frac{u}{1 + \frac{u}{2}} = \frac{z - 1}{1 + \frac{z - 1}{2}} = 2 \frac{z - 1}{2 + (z - 1)} = 2 \frac{z - 1}{z + 1} = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Tehát

$$S = \frac{\ln z}{T} \approx \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$u = z - 1$$

Elnevezések:

- Bilineáris transzformáció
- **Tustin-transzformáció**
- Möbius-transzformáció



Diszkretizálás

Átviteli függvények diszkretizálása

- **Véges differenciák módszere:** 1. sz. közelítés - Euler-féle közelítés.
- **Tustin-transzformáció:** 2. sz. közelítés - ez az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer, jó közelítést ad mind amplitúdóban, mind fázisban.
- **Kvadratura formulákkal:** integrál formák diszkrét közelítése révén.
- **Diszkrét interpoláció / approximáció alkalmazása:** optimumkritériumok alkalmazása, pl. legkisebb négyzetek (least square - LS), Csebisev interpoláció, stb.



Diszkretizálás

Átviteli függvények diszkretizálása

Matlab® megoldás

```
sysd = c2d(sys, Ts)
```

Folytonos idejű rendszer
átalakítása diszkrét idejűvé

T_s – mintavételi periódus

```
sysd = c2d(sys, Ts, method)
```

Módszer: ‘zoh’ – 0-rendű tartó
 ‘foh’ – Háromszög approximáció
 ‘impulse’ – Impulzus-tartó diszkretizáció
 ‘tustin’ – Bilineáris (Tustin) transzformáció
 ‘matched’ – Zérus-pólus egyeztetés



Valós idejű szabályozó realizálása

A szabályozó állapotteres alakja: (A_c, B_c, C_c, D_c)

$$\dot{\mathbf{x}} = A_c \mathbf{x} + B_c \mathbf{r} \quad \mathbf{r} - \text{a szabályozó bemeneti jele (rendelkező jel)}$$

$$\mathbf{v} = C_c \mathbf{x} + D_c \mathbf{r} \quad \mathbf{v} - \text{a szabályozó kimeneti jele (beavatkozó jel)}$$

A DC szervo szabályozás esetében \mathbf{r} és \mathbf{v} 1-dimenziós (skalár) jelek, az állapottér dimenziója 3.

$$A = A^{3 \times 3} = \{\alpha_{ij}\} \quad B = B^{3 \times 1} = \{\beta_i\} \quad C = C^{1 \times 3} = \{\gamma_j\} \quad D = \delta$$

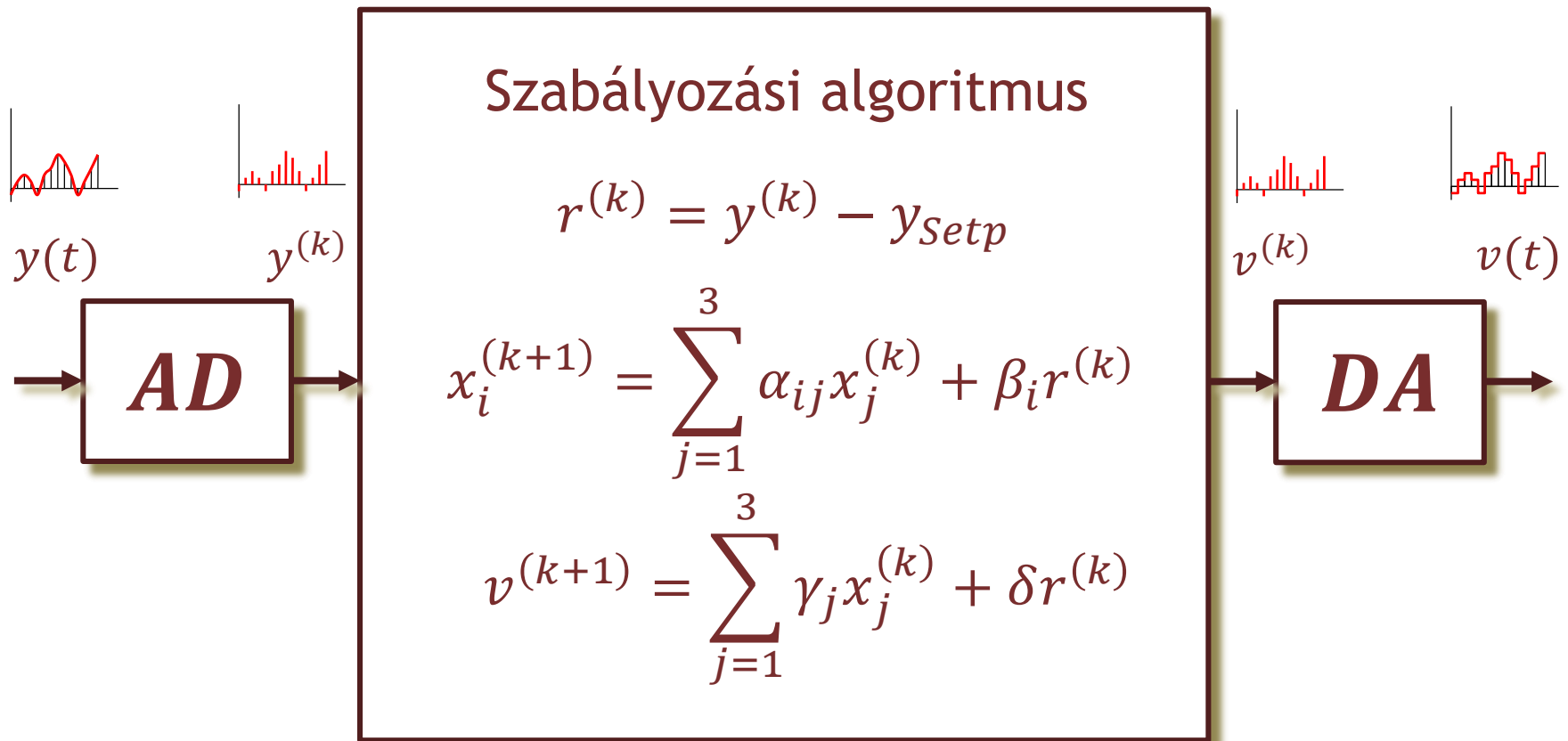
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{3 \times 1} = \{x_i\} \quad x_i^{(k)} \text{ jelöli a jel a } k \text{ indexű diszkrét időponthoz tartozó értékét} \quad t_k = kT_s$$

A szabályozót leíró differenciaegyenletek:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i r^{(k)} \quad v^{(k+1)} = \sum_{j=1}^3 \gamma_j x_j^{(k)} + \delta r^{(k)}$$



Valós idejű szabályozó realizálása



A szabályozó algoritmus digitális számítógépen (mikroszámítógépen) egyszerűen realizálható



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Soumelidis Alexandros



email: soumelidis@sztaki.hu



BME KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI ÉS JÁRMŰMÉRNÖKI KAR
32708-2/2017/INTFIN SZÁMÚ EMMI ÁLTAL TÁMOGATOTT TANANYAG