



**BME**

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



**OKJIT**

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

# Algoritmusok Tervezése

Fuzzy rendszerek

Dr. Bécsi Tamás

# Bevezetés

- Mese a homokkupacról és a hidegről és a hegyekről



HILL



MOUNTAIN



# Bevezetés, Fuzzy történet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

- Két értékű logika, Boole algebra
- Háromértékű logika
- $n$  értékű logika (Lukasiewicz)
- Folytonos értékkészletű logika
- Halmazelméleti megközelítés (Zadeh)
  
- Kóczy T. László, Tikk Domonkos: Fuzzy rendszerek, Typotex

# A (klasszikus) kétértékű logika, Boole Algebra

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

- A klasszikus kétértékű logikában (Boole-algebra) a logikai változó igazságértéke 0 (hamis) vagy 1 (igaz)
- az egy logikai változóra értelmezhető negálás:  $\neg p$
- a két logikai változó közötti VAGY kapcsolat (diszjunkció):  $p \vee q$
- a két logikai változó közötti ÉS kapcsolat (konjunkció):  $p \wedge q$

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

**kommutativitás**  $p \wedge q = q \wedge p$  ;  $p \vee q = q \vee p$

**asszociativitás**

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r ; p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

**disztributivitás**

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) ;$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

**egységelem**  $p \wedge 1 = p$

**nullelem**  $p \vee 0 = p$

**elnyelési tulajdonság**  $p \wedge 0 = 0$  ;  $p \vee 1 = 1$

**idempotencia**  $p \wedge p = p$  ;  $p \vee p = p$

**involúció**  $\neg(\neg p) = p$

**De Morgan azonosságok**

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q ; \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

**a harmadik kizárásának elve**  $p \vee \neg p = 1$

**az ellentmondás elve**  $p \wedge \neg p = 0$

# Halmazok, Boole Algebra

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

- Negálás, komplementképzés :  
 $A' = \{x \mid x \notin A\}$
- Két halmaz metszete, konjunkció :  
 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Két halmaz uniója, diszjunkció  
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Két halmaz különbsége :  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B'$

**kommutativitás:**  $A \cap B = B \cap A$  ;  $A \cup B = B \cup A$

**asszociativitás:**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C ;$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

**disztributivitás:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**egységelem:**  $A \cap X = A$

**nullelem:**  $A \cup \emptyset = A$

**elnyelési tulajdonság:**  $A \cap \emptyset = \emptyset$  és  $A \cup X = X$

**idempotencia:**  $A \cap A = A$  és  $A \cup A = A$

**involúció:**  $(A')' = A$

**De Morgan azonosságok:**

$$(A \cap B)' = A' \cup B' ;$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

**a harmadik kizárásának elve:**  $A \cup A' = X$

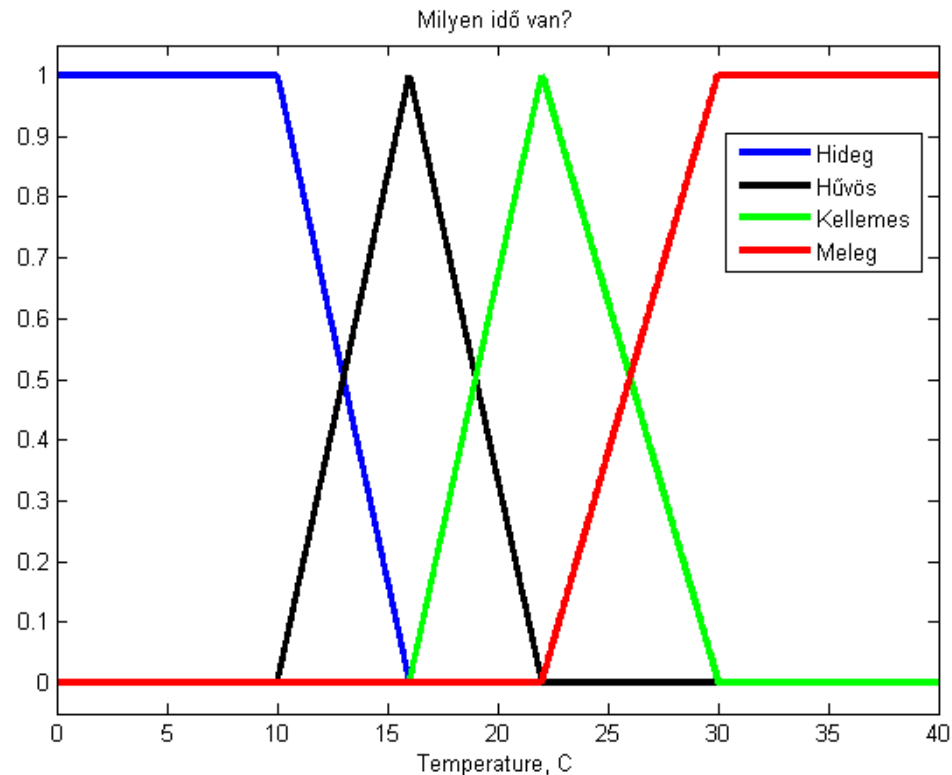
**az ellentmondás elve:**  $A \cap A' = \emptyset$

# Bevezetés, Halmazok

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék



- Mire megyek ezzel?
- A végén el kell döntenem, hogy mit vegyek fel.
- Fél pulóver nincs

# A Fuzzy elmélet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

- Soft Computing módszerek
- A többértékű logikák egy része
- Nemlineáris következtetések
- Ha a rendszer modellezése bonyolult
- Értékkészlete  $[0, 1]$
- Halmazelméleti megközelítés
- Cél a Boole algebra bizonyos szabályinak betartása

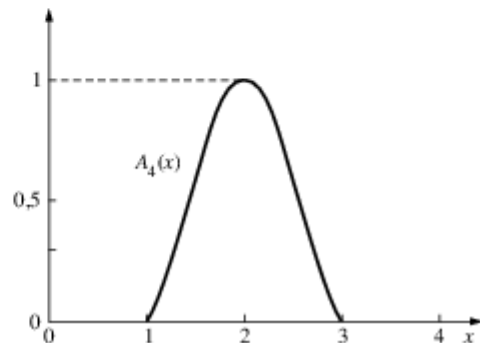
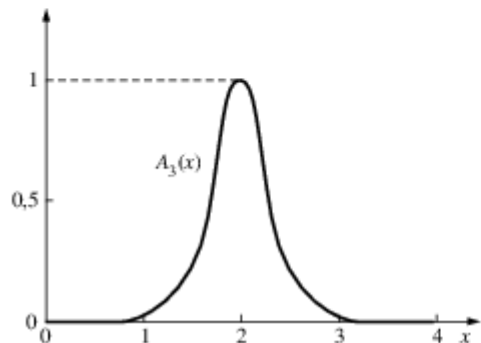
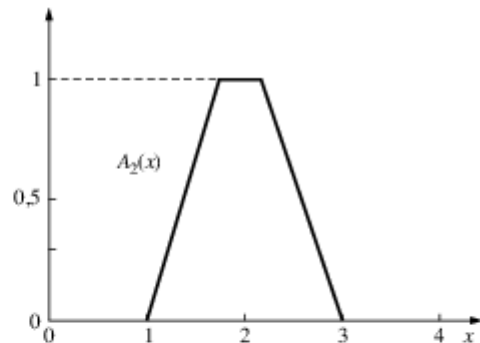
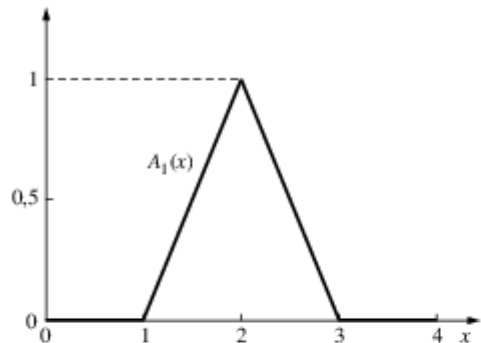
# Fuzzy halmazok alapvető típusai

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

**Tagsági függvény:** Az értelmezési tartományon megmondja, hogy az adott érték milyen mértékben  $[0, 1]$  tagja a **fuzzy halmaznak**.  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ , vagy  $A: X \rightarrow [0, 1]$



$$A_1 = \begin{cases} p_1(x - r) + 1, & \text{ha } x \in [r - (1/p_1), r], \\ p_1(r - x) + 1, & \text{ha } x \in [r, r + (1/p_1)], \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [r - p_2, r + p_2], \\ p_3((x + p_2) - r) + 1, & \text{ha } x \in [r - (1/p_3) - p_2, r - p_2], \\ p_3(r - (x - p_2)) + 1, & \text{ha } x \in [r + p_2, r + (1/p_3) + p_2], \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

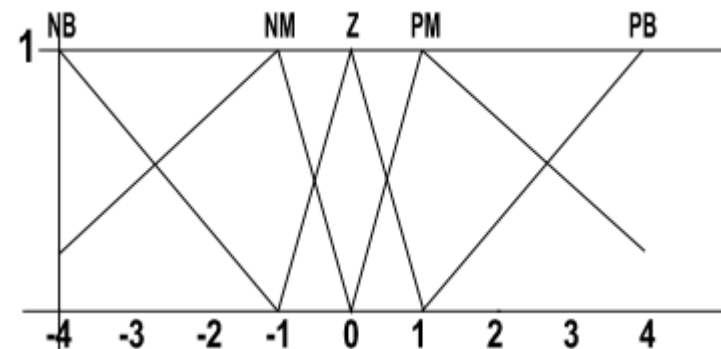
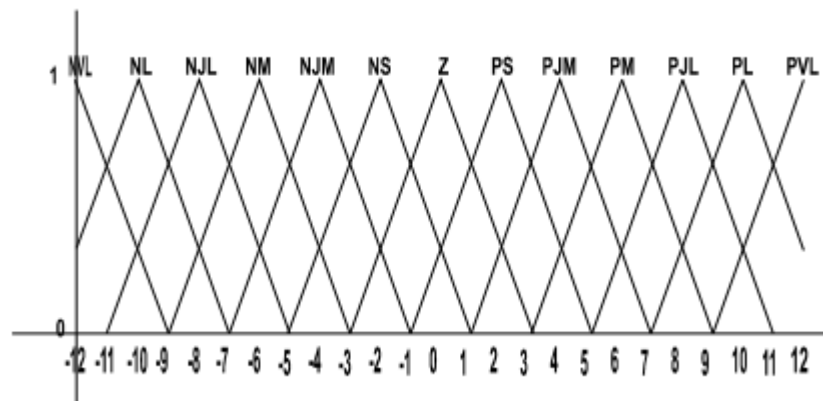
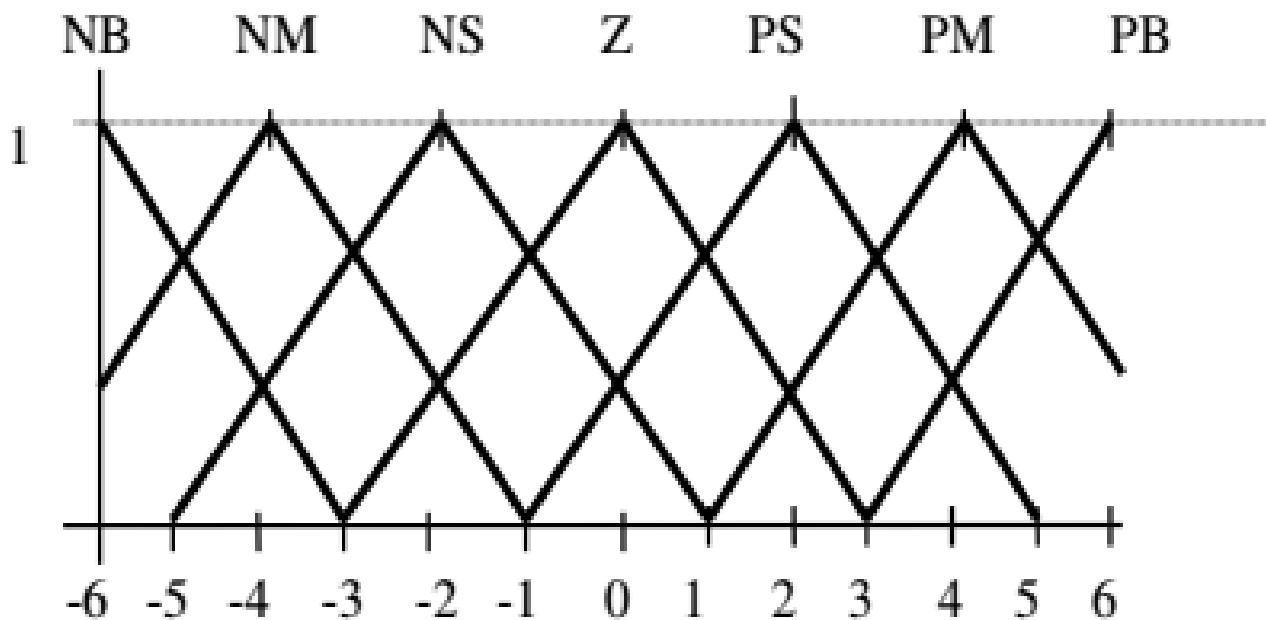
$$A_3 = \frac{1}{1 + p_4(x - r)^2};$$

$$A_4 = \begin{cases} (1 + \cos(p_5\pi(x - r))) / 2, & \text{ha } x \in [r - 1/p_5, r + 1/p_5], \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$



# Fizikai változók normalizálása

A fizikai változókat gyakran normalizáljuk egy tartományra (egységesebb kezelhetőség) és különböző fuzzy halmazokat definiálunk rajtuk. Megkülönböztetve a változó előjelét (P= pozitív, N=negative) és nagyságát (pl. B=Big [nagy], M= medium [közepes], S=small [kicsi], Z=zero [nulla])



# Halmazműveletek, komplement

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

- Három alpművelet: komplement, metszet, unió

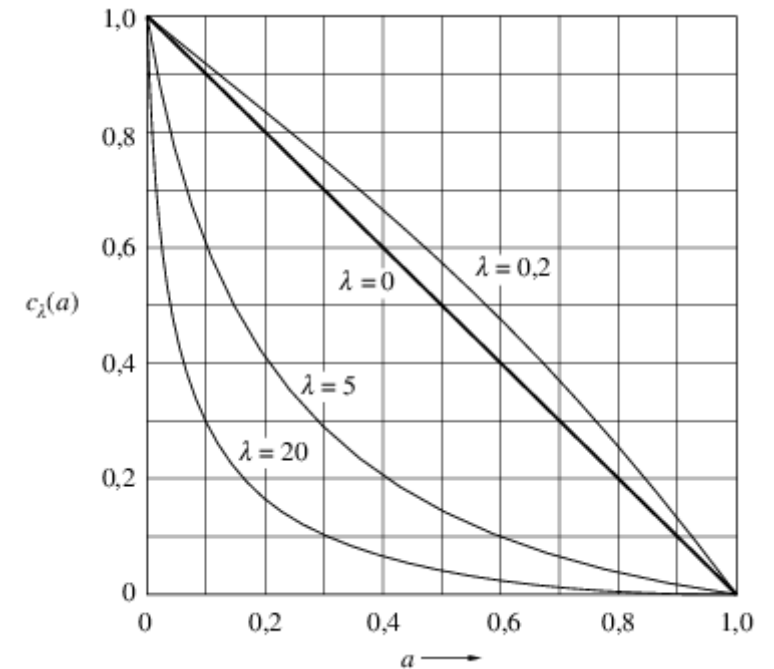
Fuzzy komplementnek nevezzük a  $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$  függvényt, ha  $A(x)$  értékhez a  $c(A(x))$  értéket úgy rendeli hozzá, hogy:

- $c(0)=1$ , és  $c(1)=0$ , (crisp megfelelés, peremfeltétel)
- $a \leq b \rightarrow c(a) \geq c(b)$ ;  $\forall a, b \in [0,1]$  (monotonitás)

További lehetséges előírások:

- $c$  folytonos
- $c(c(a))=a$

- Sugeno típus:  $c_\lambda(a) = \frac{1-a}{a1-\lambda a}$



# Halmazműveletek, metszetek

A és B halmazokon metszete:  $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$   
t-normának is hívjuk, ha teljesül:

- $t(a, 1) = a$ , peremfeltétel
- $b \leq c \rightarrow t(a, b) \leq t(a, c)$ , monotonitás
- $t(a, b) = t(b, a)$  kommutativitás
- $t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c)$  asszociativitás

További lehetséges feltételek

- t folytonos
- $t(a, a) \leq a$ , vagy  $t(a, a) = a$

# Halmazműveletek, metszetek

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Zadeh metszet:

$$t(a, b) = \min(a, b)$$

Algebrai szorzat:

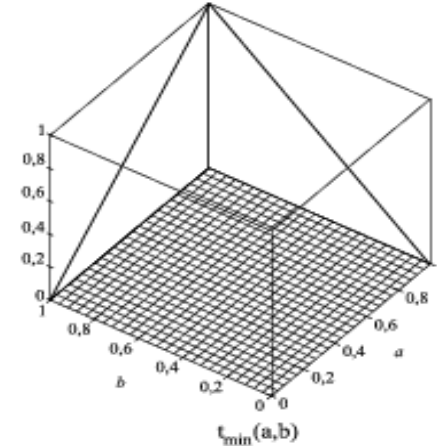
$$t(a, b) = ab$$

Korlátos különbség:

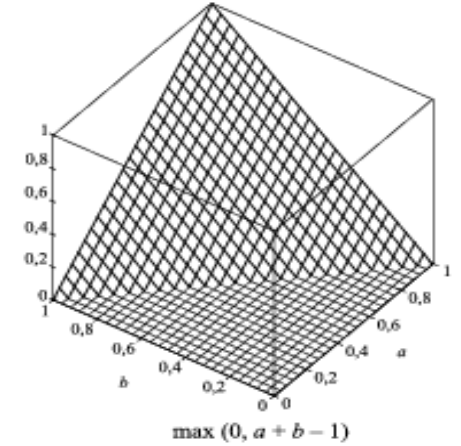
$$t(a, b) = \max(0, a + b - 1)$$

Drasztikus metszet:

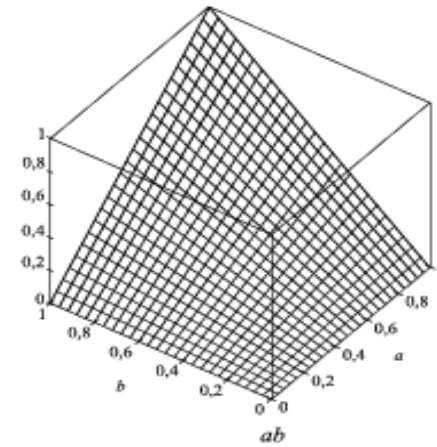
$$t(a, b) = \begin{cases} a, & \text{ha } b = 1 \\ b, & \text{ha } a = 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$



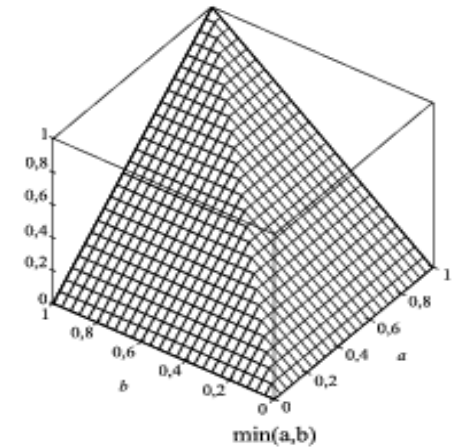
(a)



(b)



(c)



(d)

# Halmazműveletek, uniók

A és B halmazokon uniója:  $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$   
s-normának is hívjuk, ha teljesül:

- $s(a, 0) = a$ , peremfeltétel
- $b \leq c \rightarrow s(a, b) \leq s(a, c)$ , monotonitás
- $s(a, b) = s(b, a)$  kommutativitás
- $s(a, s(b, c)) = s(s(a, b), c)$  asszociativitás

További lehetséges feltételek

- s folytonos
- $s(a, a) > a$ , vagy  $s(a, a) = a$

# Halmazműveletek, uniók

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar

Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Zadeh unió:

$$s(a, b) = \max(a, b)$$

Algebrai összeg:

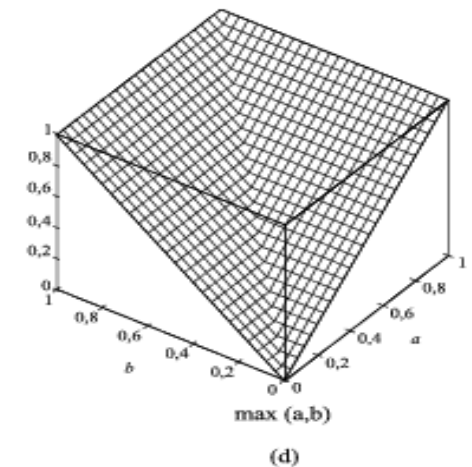
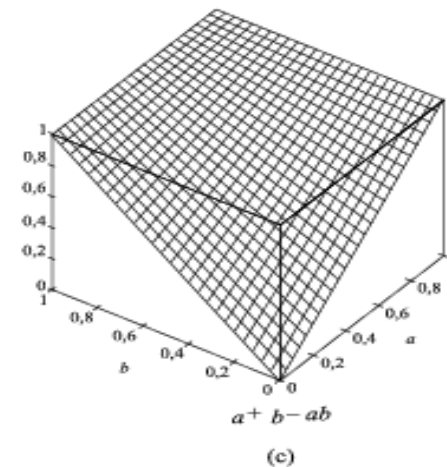
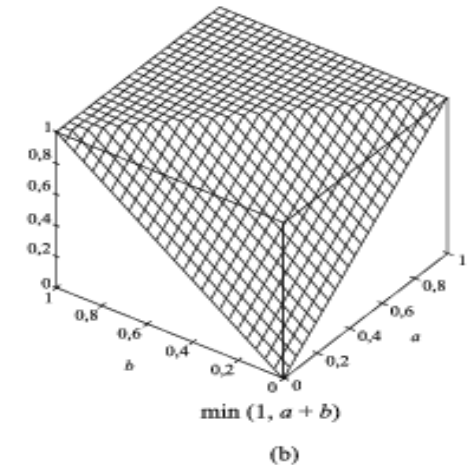
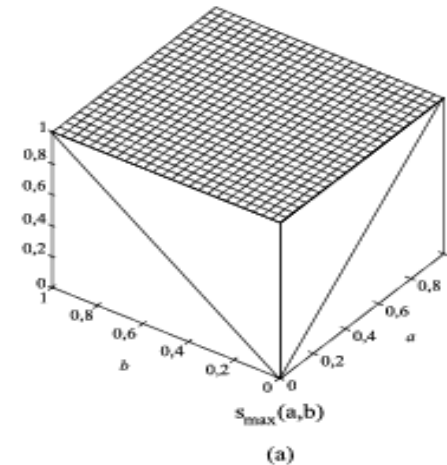
$$s(a, b) = a + b - ab$$

Korlátos összeg:

$$s(a, b) = \min(1, a + b)$$

Drasztikus unió:

$$t(a, b) = \begin{cases} a, & \text{ha } b = 0 \\ b, & \text{ha } a = 0 \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$



# Relációk, direkt szorzat

- Legyen  $X_i$  alaphalmaz,  $A_i$  fuzzy halmaz a  $\mu_{A_i}(x_i)$  tagsági függvénynel,  $A_i = (X_i, \mu_{A_i}), i = 1, 2, \dots, n$  akkor az  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  **fuzzy direkt szorzat** tagsági függvénye:

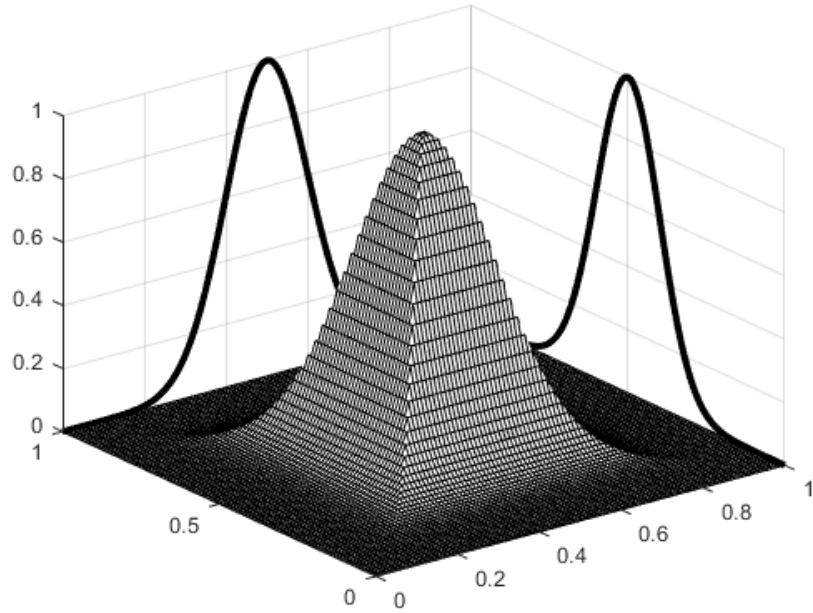
$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n)$$

Ahol  $\wedge$  egy alkalmas T-norma, pl:  $\wedge = \min$ .

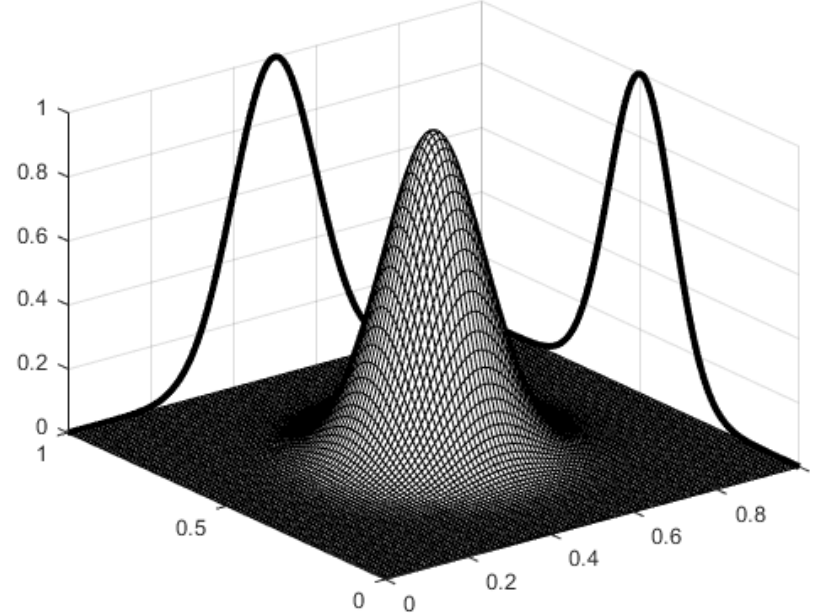


# Direkt szorzat

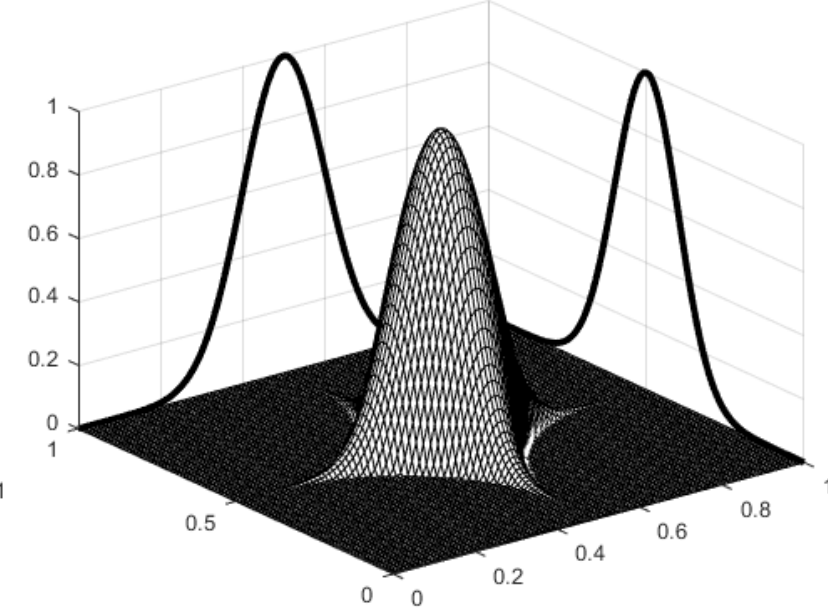
t-norm:  $\min(a,b)$



t-norm:  $ab$



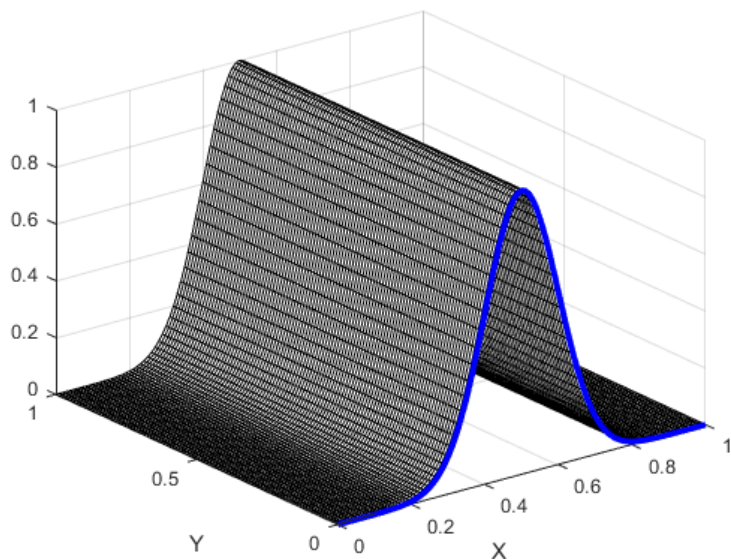
t-norm:  $\max(0, a+b-1)$



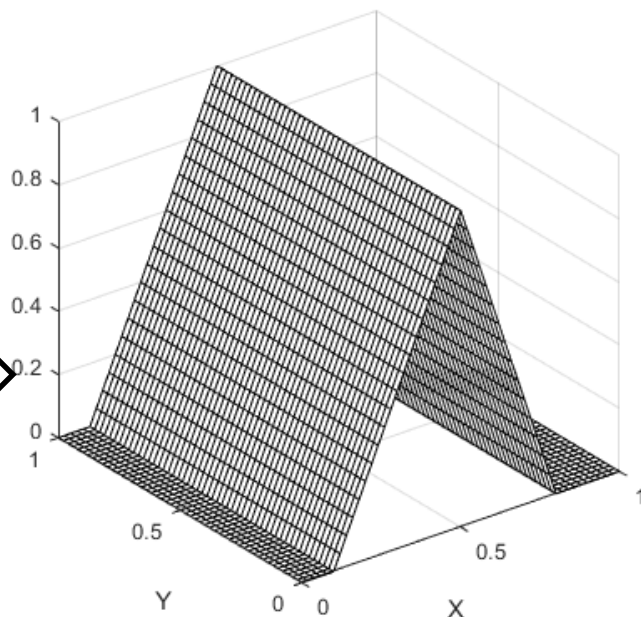
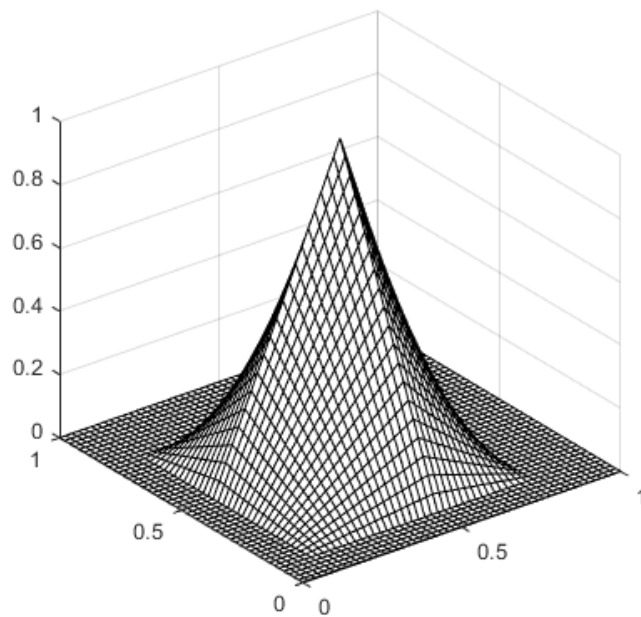


# Hengeres Kiterjesztés

Legyen  $X$  és  $Y$  halmazok. Legyen  $R$  egy  $Y$  fölött értelmezett reláció. Ekkor az az  $R$  reláció  $(X-Y)$ -ra való kiterjesztését úgy értelmezzük, hogy:  $[R \uparrow X - Y](x) = R(y)$



1. Tagsági fv „kiterjesztése”



1. Reláció „kiterjesztése”

# Projekció

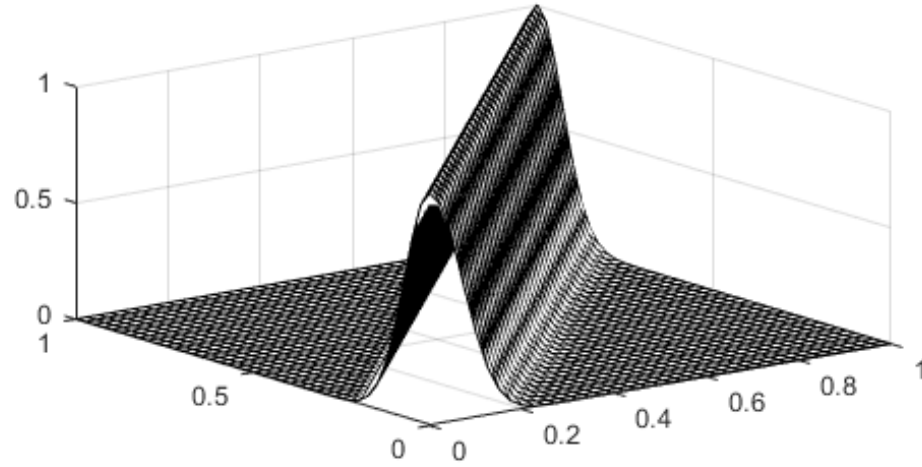
- **Motiváció.** A fuzzy szabályozást (a felállított tudásbázis alapján) definiáló relációk eredője (egyesítése) egy  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$  alaphalmazon lesz definiálva. ( $X_1 \times \dots \times X_n$  a döntéshozó bemenete,  $Y$  a kimenete). A kimenetre való hatáshoz a relációt az  $Y$  halmazra le kell vetíteni. Ehhez a projekcióra van szükség.

Legyen  $R$  egy fuzzy reláció a  $X_1 \times \dots \times X_n$  szorzattéren. Az  $R$  reláció  $X_{i,1} \times \dots \times X_{i,r}$  **térre vett projekciója** egy olyan reláció amelynek tagsági függvénye:

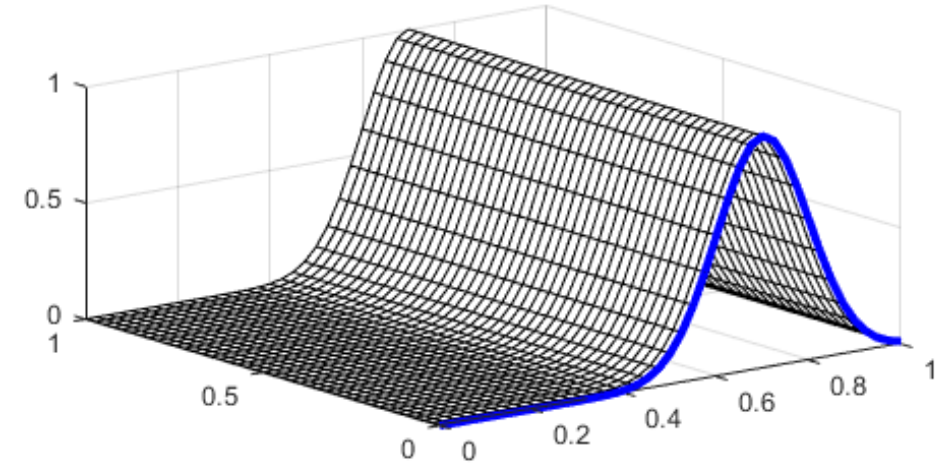
$$\mu_P(x_{i,1}, \dots, x_{i,r}) = \sup \mu_R(x_1, \dots, x_n)$$

# Példa

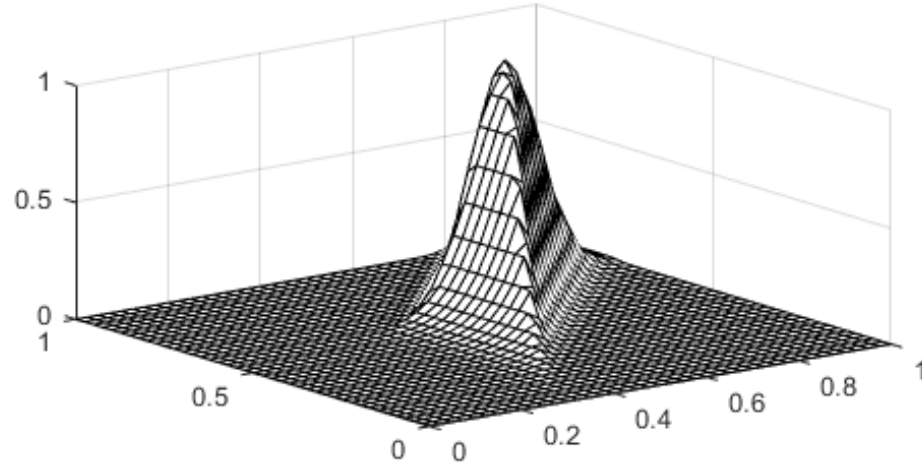
R reláció X,Y -on



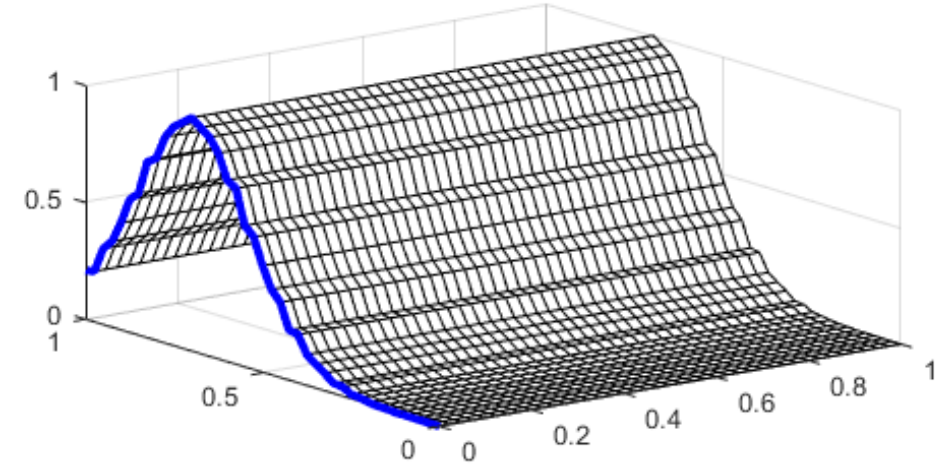
$A \uparrow$  X-Y



$\min(A,R)$



$R \downarrow$  Y

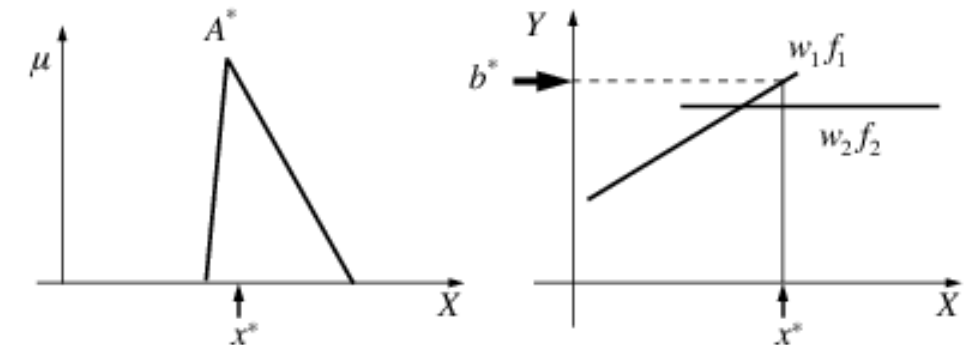
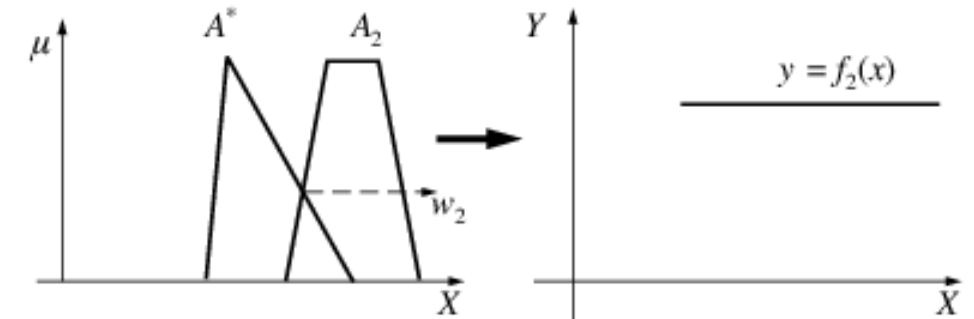
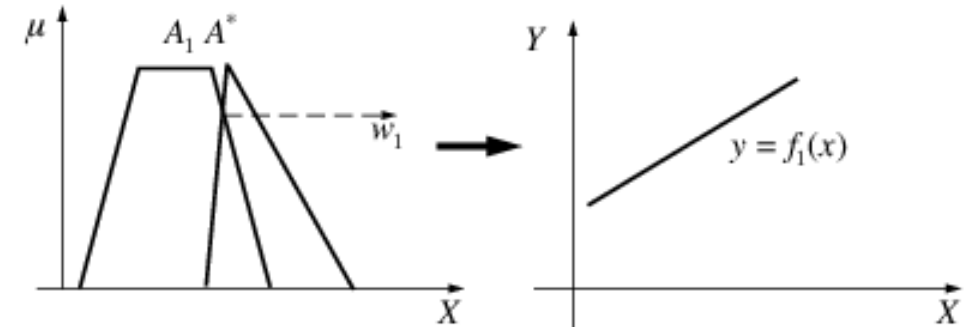


# Takagi-Sugeno típusú irányítás

- A szabályok konzekvens oldalán nem fuzzy halmazok szerepelnek, hanem konstans, lineáris, esetleg más, bonyolultabb (nem fuzzy) függvények.
- Ha  $x_1 = A_{1,i} \dots x_n = A_{n,i}$ , akkor  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$
- Ha  $w_i$  a szabály illeszkedési mértéke, akkor

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w_i y_i}{\sum_{i=1}^r w_i} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i f_i(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^r w_i}$$

- Nulladrendű esetben:  $y = \frac{\sum_{i=1}^r w_i c_i}{\sum_{i=1}^r w_i}$



# Mamdani féle irányítás 1.

- Adott  $n$  darab mérés,  $A^* = X_n$  bemenettel, és  $r$  darab szabály. Ekkor a mérési vektor illeszkedése ( $j \in 1..n$ ):

$$w_{i,j} = \max_{x_j} \{ \min \{ A_j^*, A_{j,i}(x_j) \} \}$$

- crisp bemenet esetében:  $w_{i,j} = A_{j,i}(x_j)$
- Az  $R_i$   $i$ -ik szabály alkalmazhatósága a hozzá tartozó súlyok minimuma:  $w_i = \min_j (w_{j,i})$

- A szabály következtetése a hozzá tartozó  $B_i$  következtető halmaz, és az illeszkedés minimuma:

$$B_i^* = \min(w_i, B_i(y))$$

- A vezérlő kimenet fuzzy halmaza, az összes következtetés uniója:

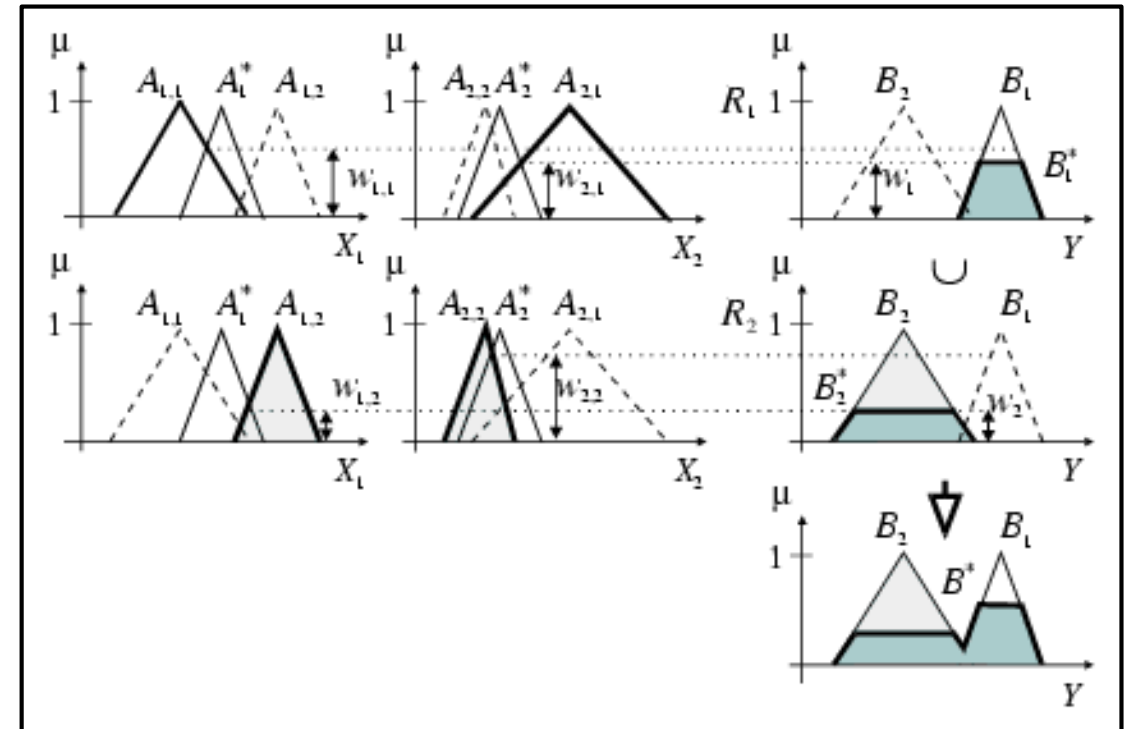
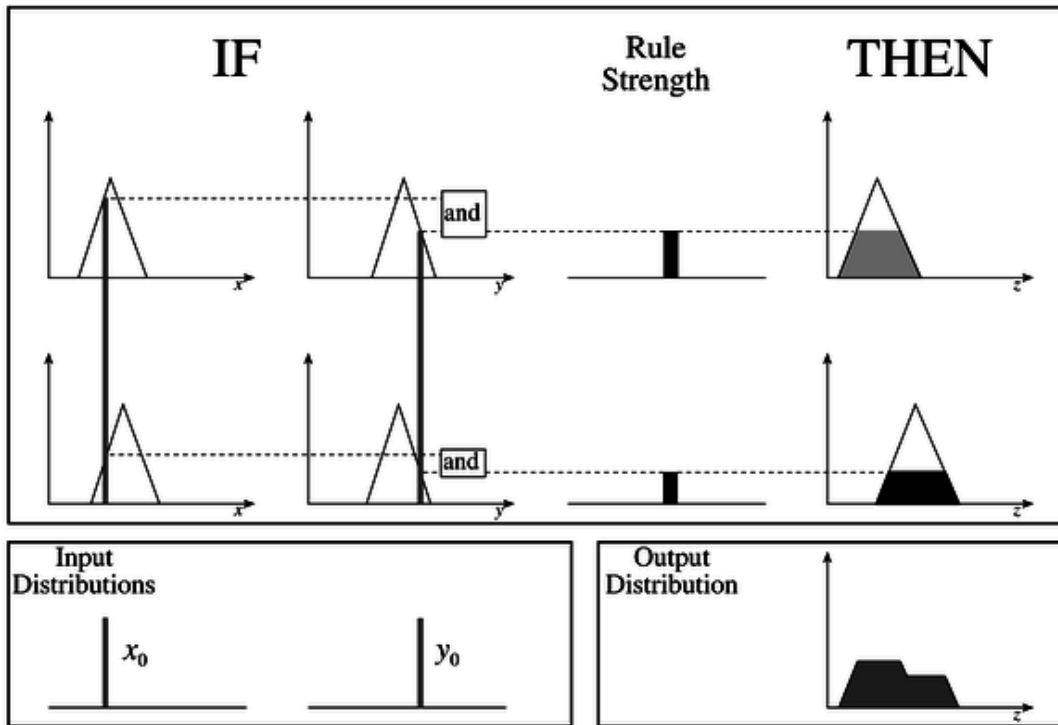
$$B^* = \bigcup_{i=1}^r B_i^* = \max_{i=1}^r (B_i^*)$$



# Mamdani féle irányítás 2.

Crisp  
bemenetek

Fuzzy  
bemenetek



# Defuzzifikáció

- A MAMDANI-típusú következtetési algoritmusok fuzzy halmazt adnak eredményül.
- A gyakorlati alkalmazások zömében azonban a fuzzy irányítási rendszer kimeneteként egyszerű crisp numerikus értékre van szükség.
- A fuzzy konklúzióból tehát ki kell választani egy konkrét értéket, mely az adott fuzzy halmazt az alkalmazástól, illetve modellezett rendszertől függően a legjobban jellemzi.
- Ezt az eljárást *defuzzifikációnak* nevezzük.

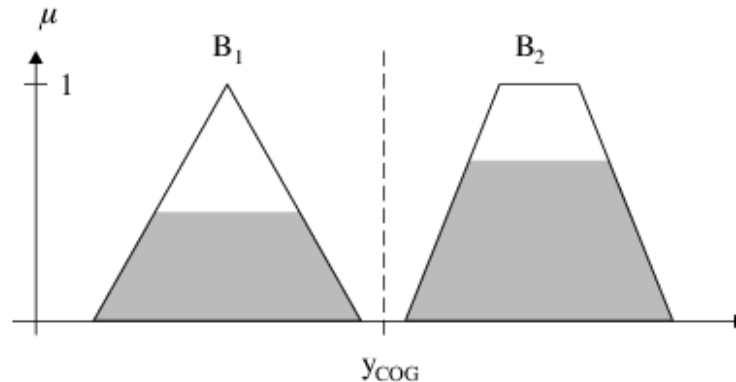
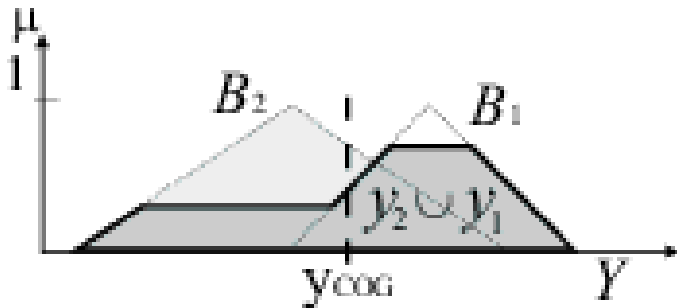
# Súlypont módszer (COG)

- $AB^*$  halmaz legjellemzőbb pontjával a súlypontot (Center Of Gravity) adjuk meg, melyet az egyes  $B_i^*$  részkonklúziók súlypontjának átlagaként kapunk meg:

$$y_i^* = \frac{\int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) y dy}{\int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) dy}$$

$$w_i^* = \int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) dy$$

$$y_{\text{COG}} = \frac{\sum_{i=1}^r (y_i^* \cdot w_i^*)}{\sum_{i=1}^r w_i^*}$$





# COA, MOM

- Geometriai középpont módszer (COA)

$$c_{COA} = \frac{\int B^*(y)y \, dy}{\int B^*(y) \, dy}$$

- Maximumok közepe módszer (MOM)

$$c_{MOM} = \frac{\int B^*(y)y \, dy}{\int B^*(y) \, dy}, y$$

$$\in \text{MAX}(B^*)$$

