Diszkrét Irányítások tervezése

Fuzzy rendszerek

Dr. Bécsi Tamás

Bevezetés

- Mese a homokkupacról és a hidegről és a hegyekről

Bevezetés, Fuzzy történet

- Két értékű logika, Boole algebra
- Háromértékű logika
- n értékű logika (Lukasiewicz)
- Folytonos értékkészletű logika
- Halmazelméleti megközelítés (Zadeh)

- Kóczy T. László, Tikk Domonkos: Fuzzy rendszerek,Typotex

A (klasszikus) kétértékű logika, Boole Algebra

- A klasszikus kétértékű logikában (Boole-algebra) a logikai változó igazságértéke 0 (hamis) vagy 1 (igaz)
- az egy logikai változóra értelmezhető negálás: $\neg p$
- a két logikai változó közötti VAGY kapcsolat (diszjunkció): $p \vee q$
- a két logikai változó közötti ÉS kapcsolat (konjunkció): $p \wedge q$

p	q	¬ p	p ∨ q	p ∧ q
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

kommutativitás $p \wedge q = q \wedge p$; $p \vee q = q \vee p$

asszociativitás

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$; $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

disztributivitás

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

egységelem $p \wedge 1 = p$

nullelem $p \vee 0 = p$

elnyelési tulajdonság $p \wedge 0 = 0$; $p \vee 1 = 1$

idempotencia $p \wedge p = p$; $p \vee p = p$

involúció $\neg(\neg p) = p$

De Morgan azonosságok

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

a harmadik kizárásának elve $p \vee \neg p = 1$

az ellentmondás elve $p \wedge \neg p = 0$

Halmazok, Boole Algebra

- Negálás, komplemensképzés : $A' = \{ x \mid x \notin A \}$
- Két halmaz metszete, konjunkció : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Két halmaz uniója, diszjunkció $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Két halmaz különbsége : $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B'$

kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

asszociativitás:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

disztributivitás:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

egységelem: $A \cap X = A$

nullelem: $A \cup \emptyset = A$

elnyelési tulajdonság: $A \cap \emptyset = \emptyset$ és $A \cup X = X$

idempotencia: $A \cap A = A$ és $A \cup A = A$

involució: $(A')' = A$

De Morgan azonosságok:

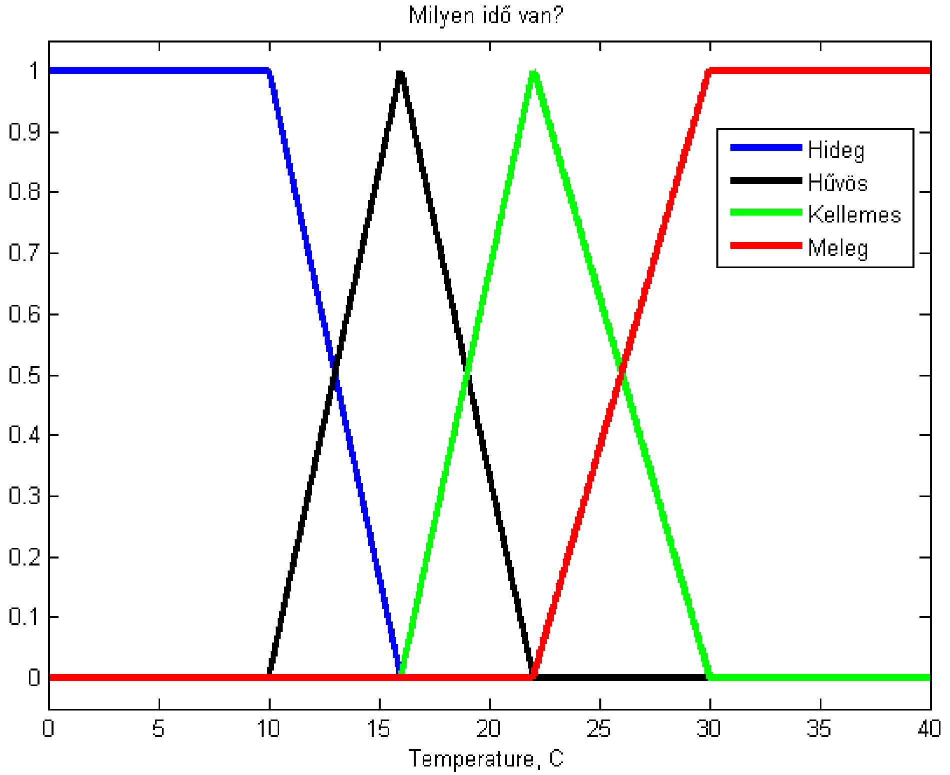
$(A \cap B)' = A' \cup B'$;

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

a harmadik kizárásának elve: $A \cup A' = X$

az ellentmondás elve: $A \cap A' = \emptyset$

Bevezetés, Halmazok



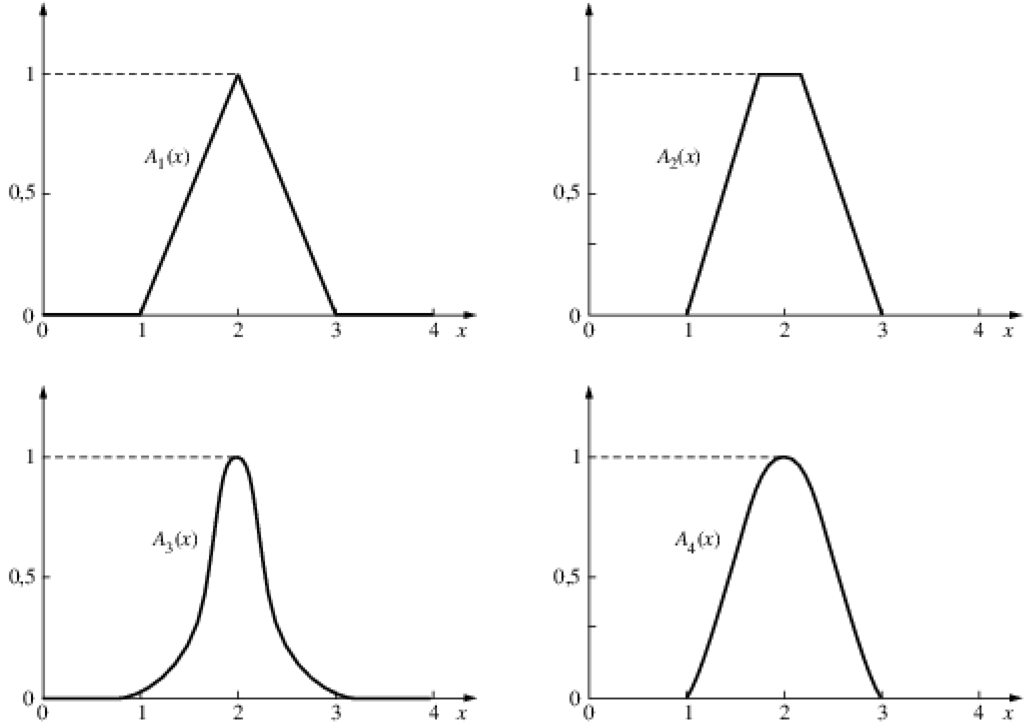
- Mire megyek ezzel?
- A végén el kell döntenem, hogy mit vegyek fel.
- Fél pulóver nincs

A Fuzzy elmélet

- Soft Computing módszerek
- A többértékű logikák egy része
- Nemlineáris következtetések
- Ha a rendszer modellezése bonyolult
- Értékkészlete [0,1]
- Halmazelméleti megközelítés
- Cél a Boole algebra bizonyos szabályinak betartása

Fuzzy halmazok alapvető típusai

Tagsági függvény: Az értelmezési tartományon megmondja, hogy az adott érték milyen mértékben [0,1] tagja a **fuzzy halmaznak**. $\mu_A: X \rightarrow [0,1], vagy\ A: X \rightarrow [0,1]$



$$A_1 = \begin{cases} p_1\,(x-r)+1, & \text{ha } x \in [r-(1/p_1)\,, r]\,, \\ p_1\,(r-x)+1, & \text{ha } x \in [r, r+(1/p_1)]\,, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [r-p_2, r+p_2]\,, \\ p_3\,((x+p_2)-r)+1, & \text{ha } x \in [r-(1/p_3)-p_2, r-p_2]\,, \\ p_3\,(r-(x-p_2))+1, & \text{ha } x \in [r+p_2, r+(1/p_3)+p_2]\,, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

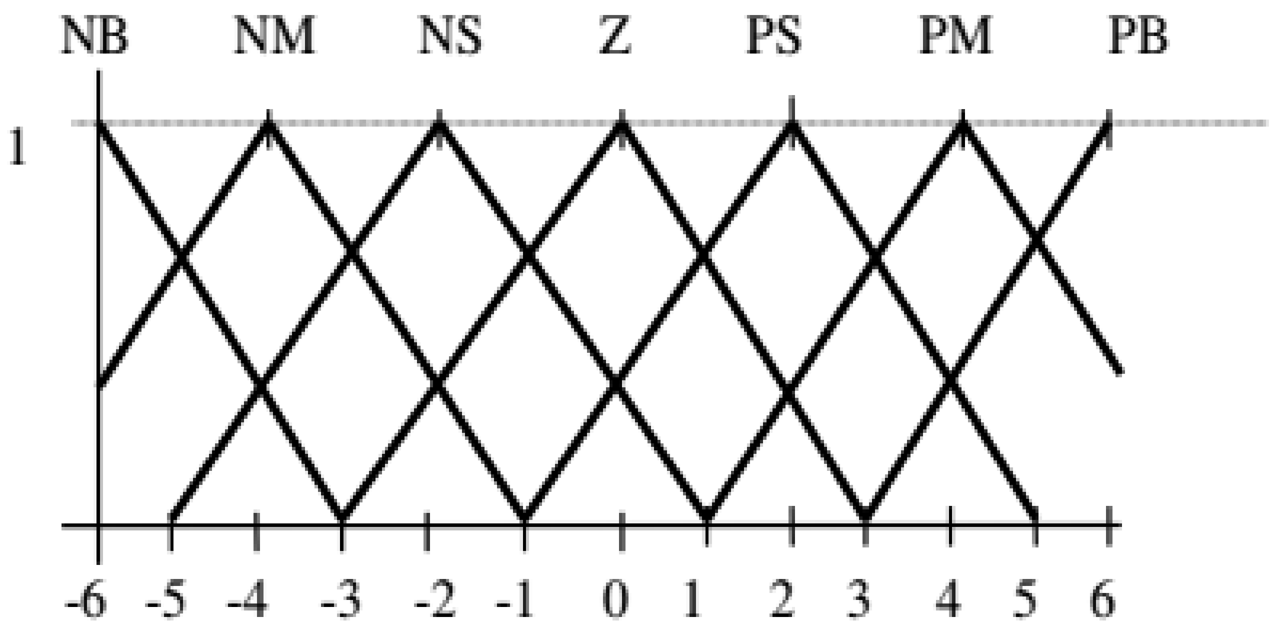
$$A_3 = \frac{1}{1+p_4(x-r)^2};$$

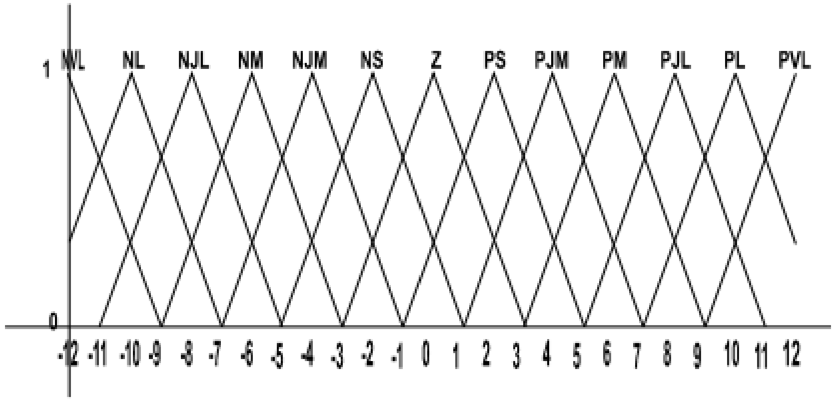
$$A_4 = \begin{cases} (1+\cos\,(p_5\pi\,(x-r)))\,/2, & \text{ha } x \in [r-1/p_5\,, r+1/p_5]\,, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

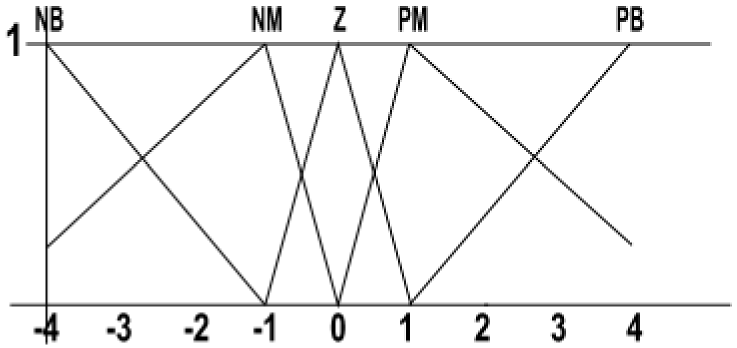
Fizikai változók normalizálása

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar
Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

A fizikai változókat gyakran normalizáljuk egy tartományra (egységesebb kezelhetőség) és különböző fuzzy halmazokat definiálunk rajtuk. Megkülönböztetve a változó előjelét (P= pozitív, N=negative) és nagyságát (pl. B=Big [nagy], M= medium [közepes], S=small [kicsi], Z=zero [nulla])







Halmazműveletek, komplemens

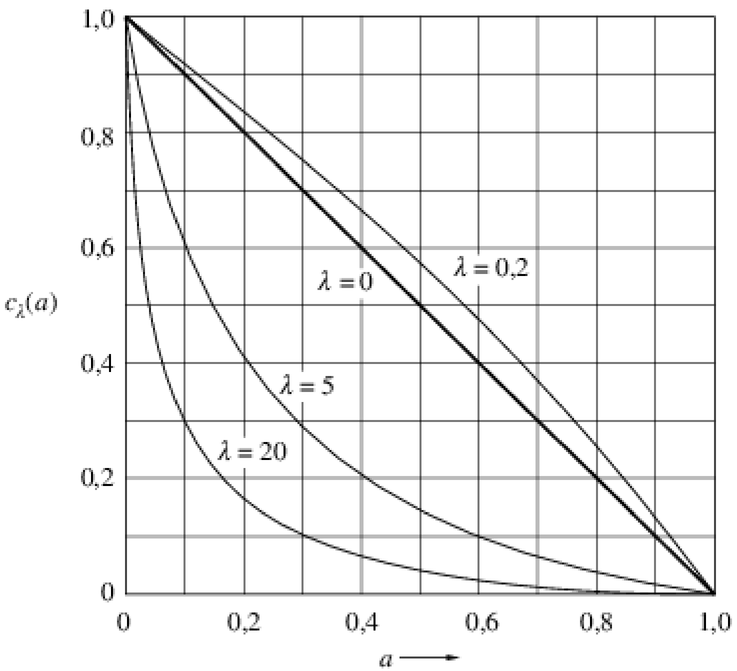
- Három alapműveletek: komplemens, metszet, unió

Fuzzy komplemensnek nevezzük a c: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ függvényt, ha A(x) értékhez a c(A(x)) értéket úgy rendeli hozzá, hogy:

- $c(0)=1$, és $c(1)=0$, (crisp megfelelés, peremfeltétel)
- $a \leq b \rightarrow c(a) \geq c(b)$; $\forall a, b \in [0,1]$(monotonitás)

További lehetséges előírások:

- c folytonos
- $c(c(a))=a$



- Sugeno típus: $c_\lambda(a) = \frac{1-a}{a1-\lambda a}$

Halmazműveletek, metszetek

A és B halmazokon metszete: $t: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
t-normának is hívjuk, ha teljesül:

- $t(a, 1) = a$, peremfeltétel
- $b \leq c \to t(a, b) \leq t(a, c)$, monotonitás
- $t(a, b) = t(b, a)$ kommutativitás
- $t\big(a, t(b, c)\big) = t(t(a, b), c)$ asszociativitás

További lehetséges feltételek

- t folytonos
- $t(a, a) \leq a, vagy\ t(a, a) = a$

Halmazműveletek, metszetek

Zadeh metszet:

$$t(a,b) = \min(a,b)$$

Algebrai szorzat:

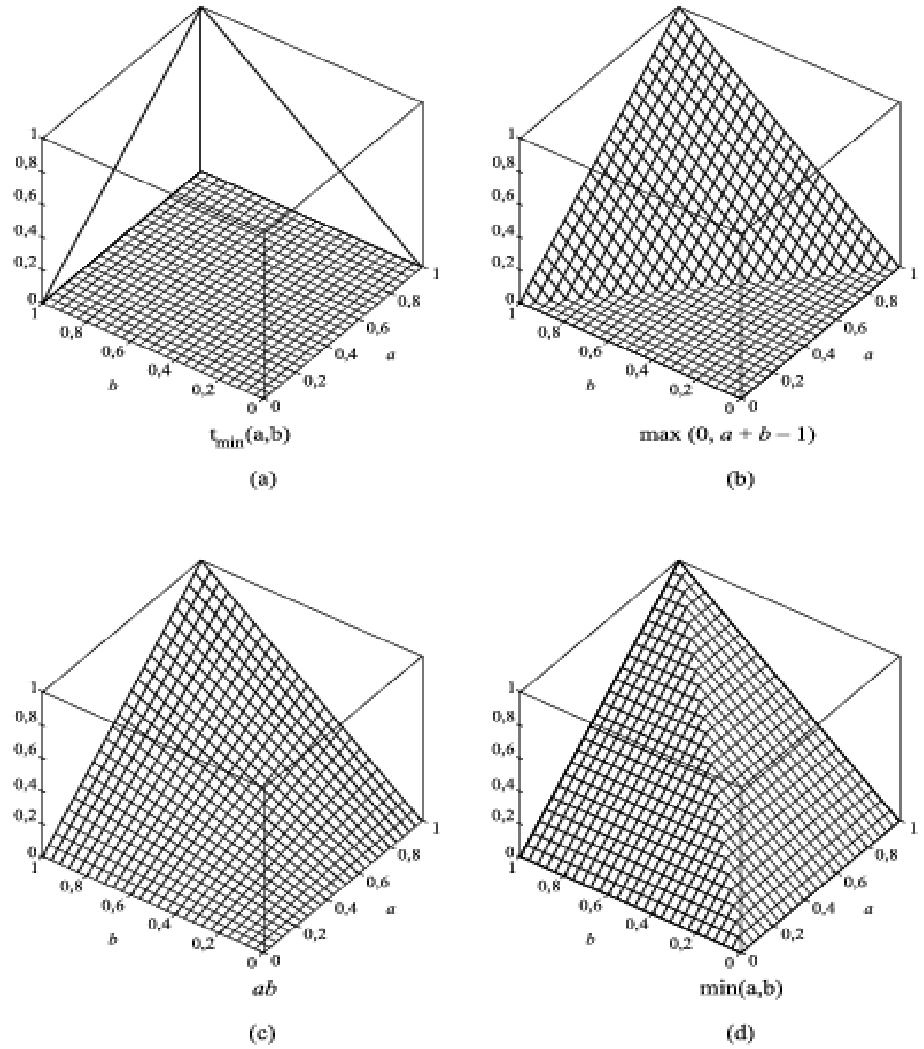
$$t(a,b) = ab$$

Korlátos különbség:

$$t(a,b) = \max(0, a+b-1)$$

Drasztikus metszet:

$$t(a,b) = \begin{Bmatrix} a, ha\ b = 1 \\ b, ha\ a = 1 \\ 0, egyébként \end{Bmatrix}$$



Halmazműveletek, uniók

A és B halmazokon uniója: $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
s-normának is hívjuk, ha teljesül:

- $s(a, 0) = a$, peremfeltétel
- $b \leq c \rightarrow a(a, b) \leq s(a, c)$, monotonitás
- $s(a, b) = s(b, a)$ kommutativitás
- $s\big(a, s(b, c)\big) = s(s(a, b), c)$ asszociativitás

További lehetséges feltételek

- s folytonos
- $s(a, a) > a, vagy\ s(a, a) = a$

Halmazműveletek, uniók

Zadeh unió:

$$s(a,b) = \max(a,b)$$

Algebrai összeg:

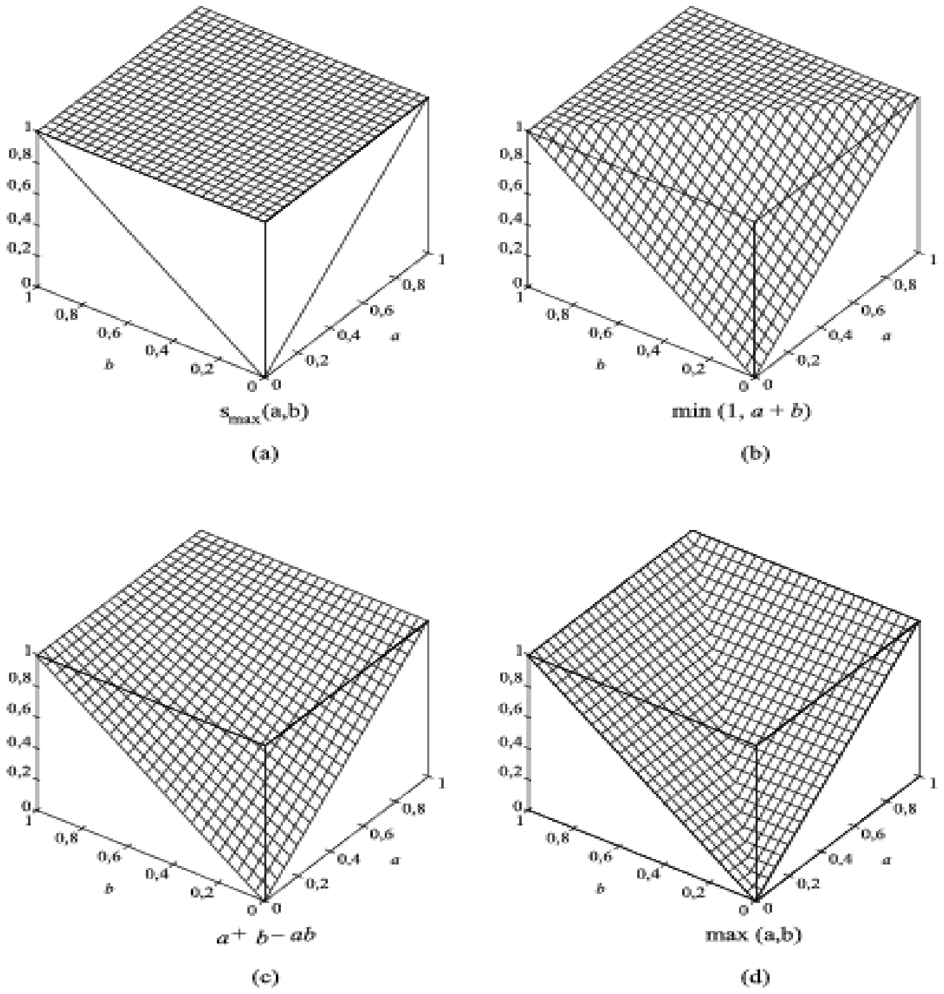
$$s(a,b) = a + b - ab$$

Korlátos összeg:

$$s(a,b) = \min(1, a + b)$$

Drasztikus unió:

$$t(a,b) = \begin{Bmatrix} a, ha\ b = 0 \\ b, ha\ a = 0 \\ 1, egyébként \end{Bmatrix}$$



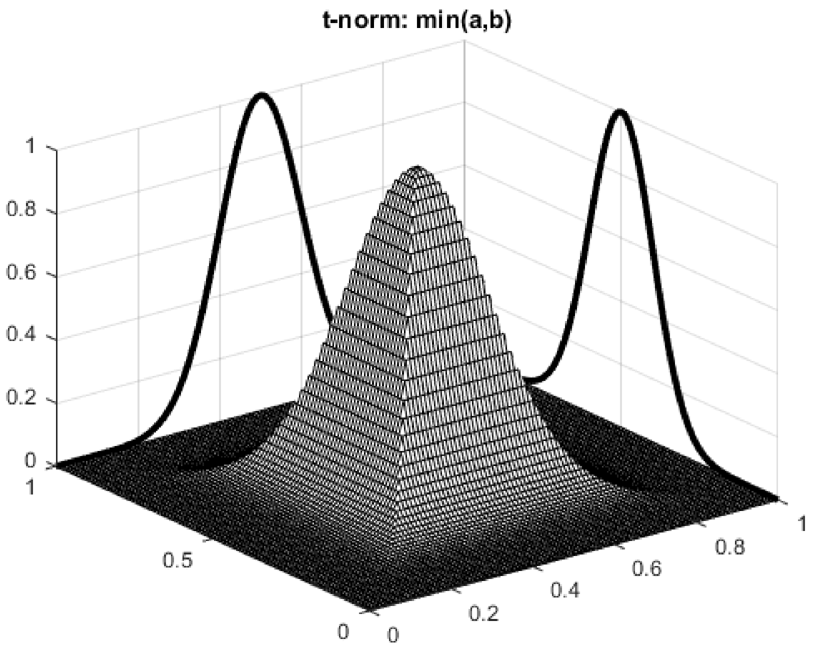
Relációk, direkt szorzat

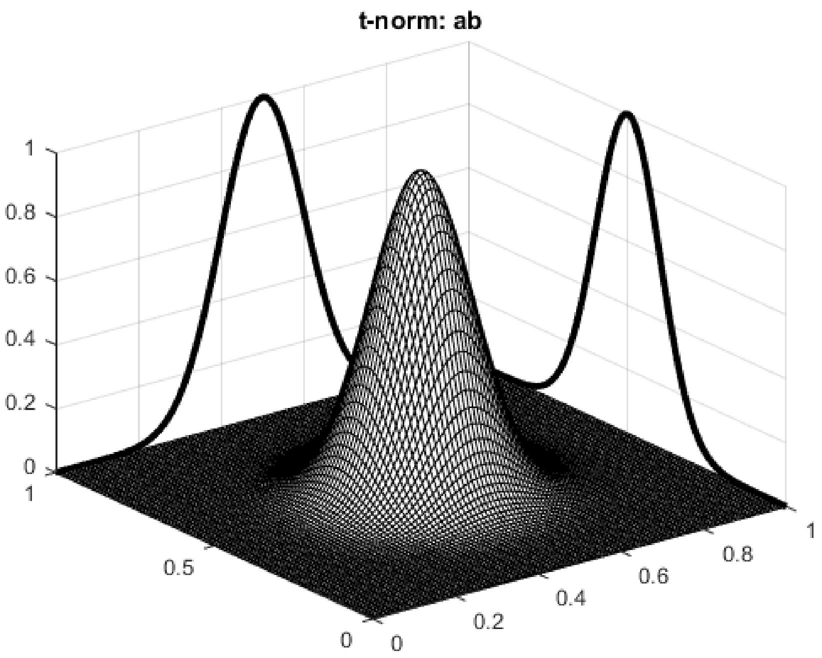
- Legyen X_i alaphalmaz, A_i fuzzy halmaz a $\mu_{A_i}(x_i)$ tagsági függvénnyel, $A_i = (X_i, \mu_{A_i}), i = 1,2, \ldots, n$ akkor az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ **fuzzy direkt szorzat** tagsági függvénye:

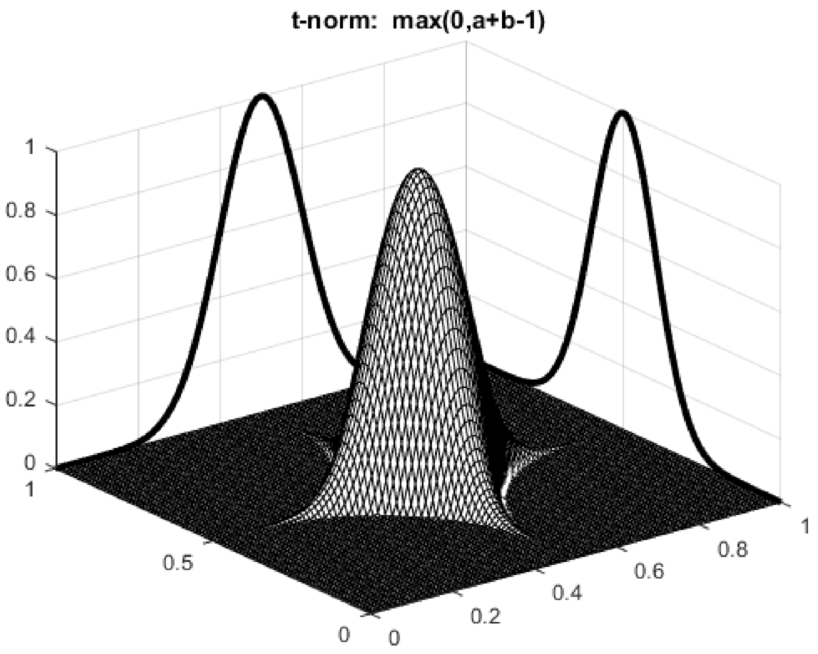
$$\mu_{A_1 \times \cdots A_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(x_n)$$

Ahol ∧ egy alkalmas T-norma, pl: ∧ = min.

Direkt szorzat

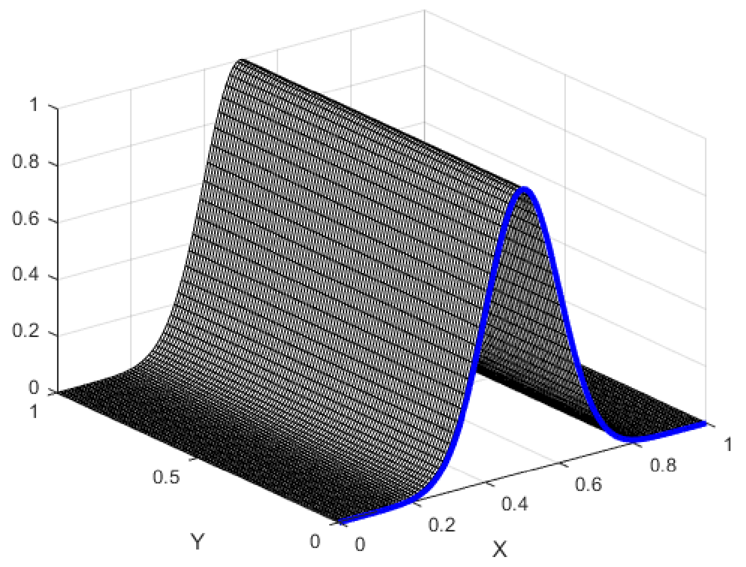




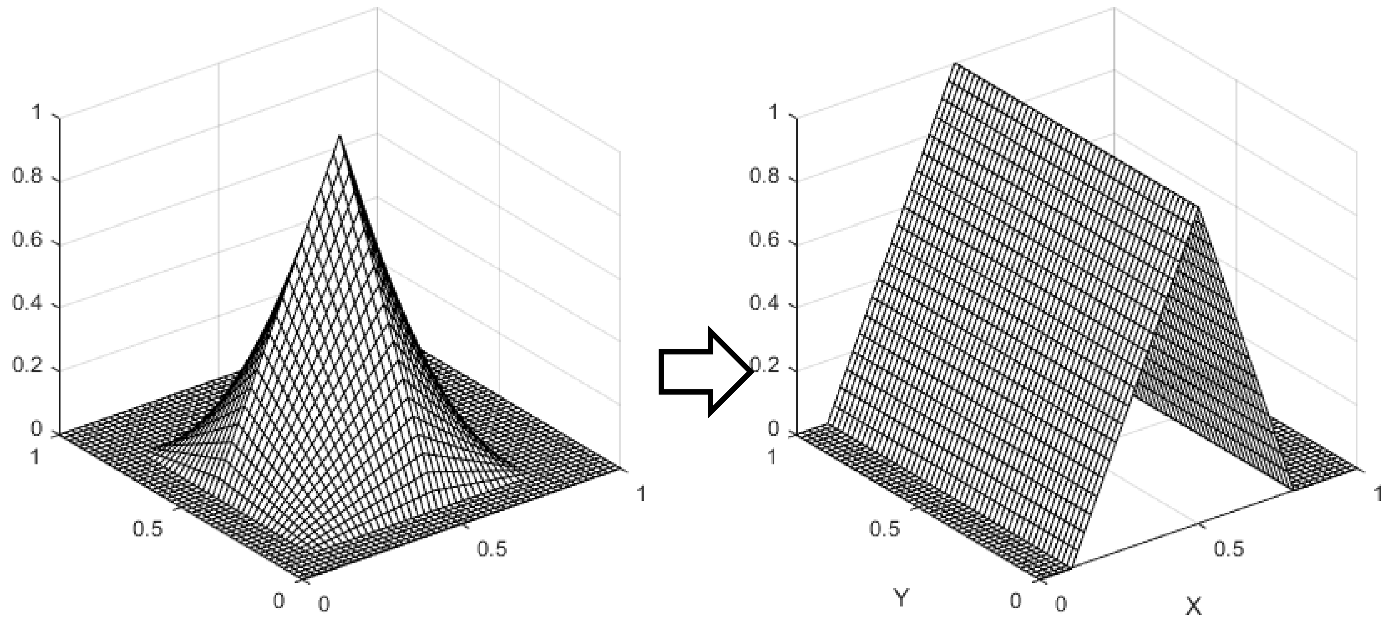


Hengeres Kiterjesztés

Legyen X és Y halmazok. Legyen R egy Y fölött értelmezett reláció. Ekkor az az R reláció (X-Y)-ra való kiterjesztését úgy értelmezzük, hogy: $[R \uparrow X - Y](x) = R(y)$



1. Tagsági fv „kiterjesztése"

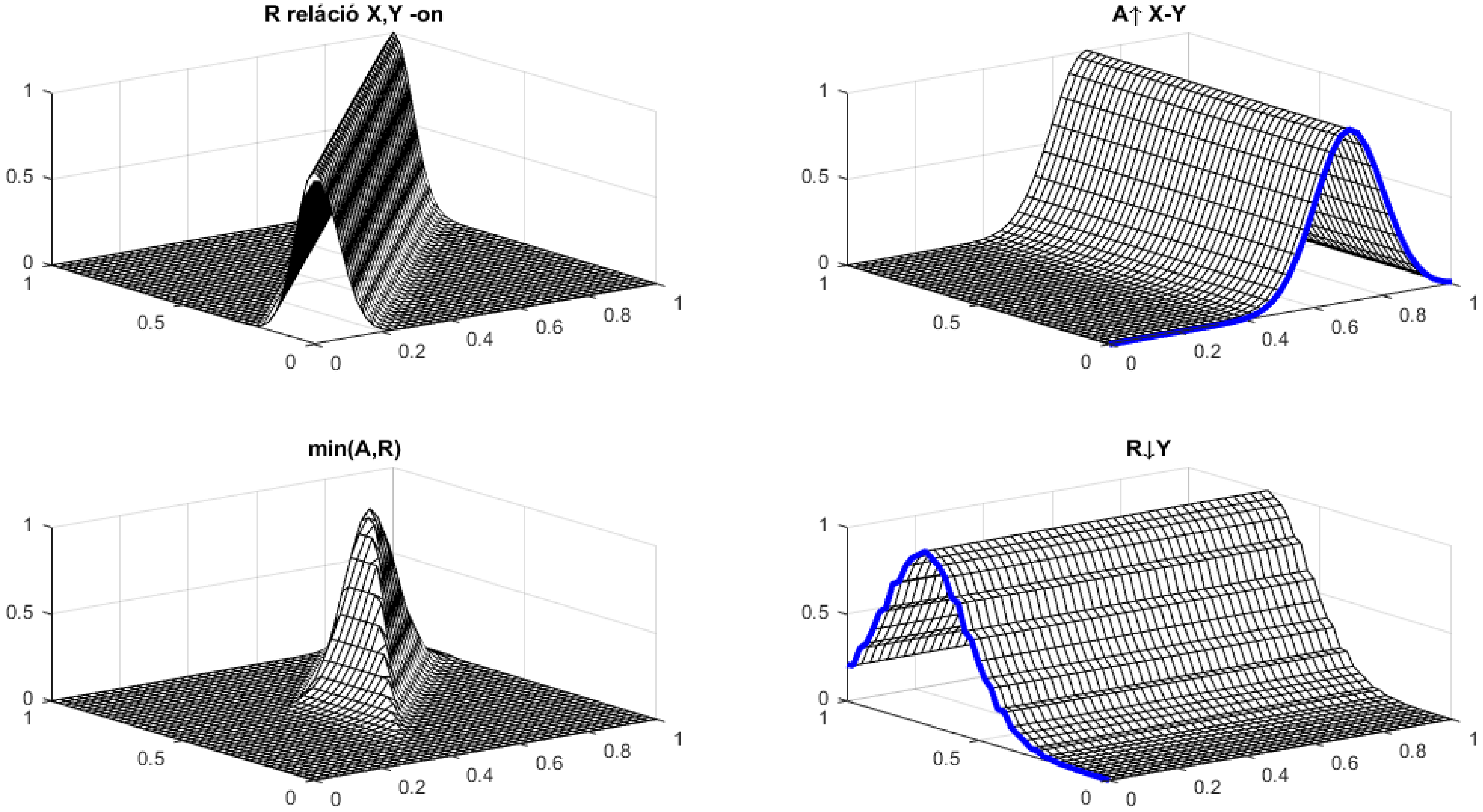


1. Reláció „kiterjesztése"

Projekció

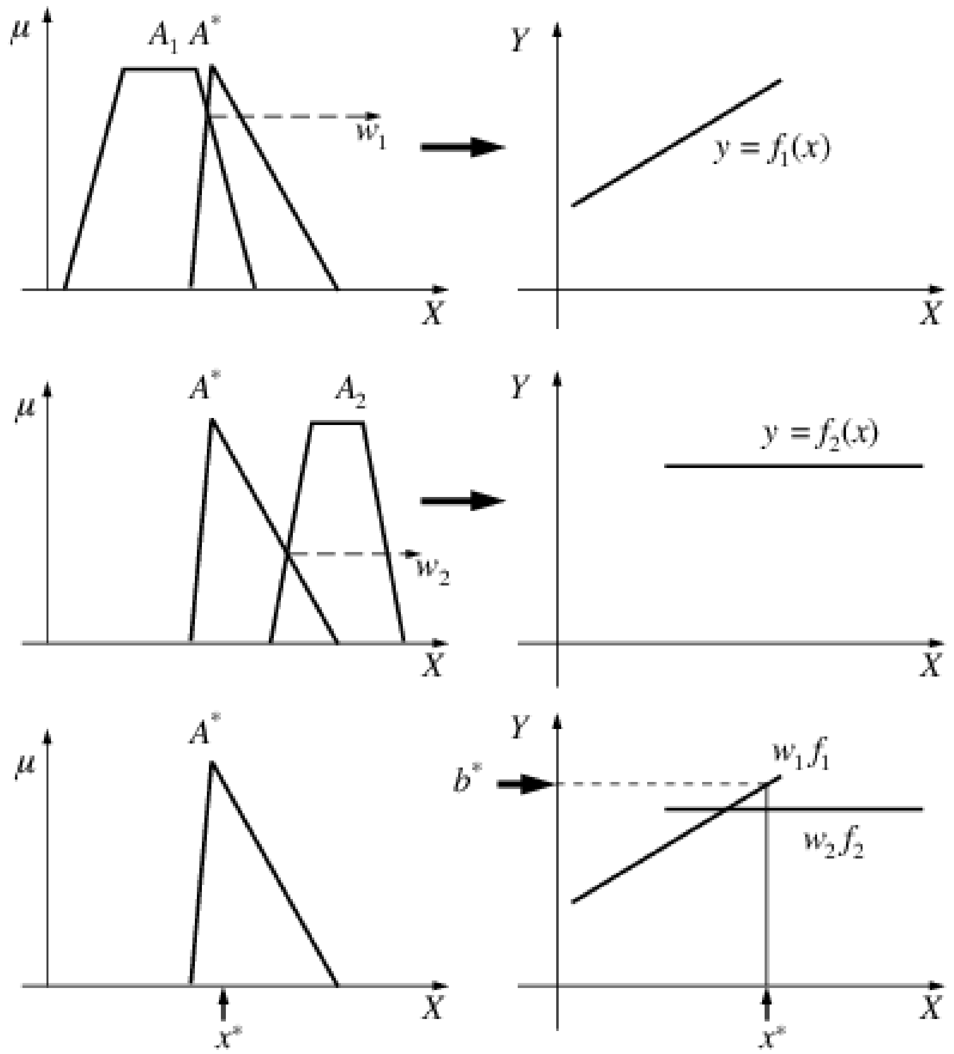
- **Motiváció.** A fuzzy szabályozást (a felállított tudásbázis alapján) definiáló relációk eredője (egyesítése) egy $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y$ alaphalmazon lesz definiálva. ($X_1 \times \cdots \times X_n$ a döntéshozó bemenete, *Y* a kimenete). A kimenetre való hatáshoz a relációt az *Y* halmazra le kell vetíteni. Ehhez a projekcióra van szükség.
  Legyen *R* egy fuzzy reláció a $X_1 \times \cdots \times X_n$ szorzattéren. Az *R* reláció $X_{i,1} \times \cdots \times X_{i,r}$ **térre vett projekciója** egy olyan reláció amelynek tagsági függvénye:
  $$\mu_P\left(x_{i,1}, \dots, x_{i,r}\right) = \sup \mu_R(x_1, \dots, x_n)$$

Példa



Takagi-Sugeno típusú irányítás

- A szabályok konzekvens oldalán nem fuzzy halmazok szerepelnek, hanem konstans, lineáris, esetleg más, bonyolultabb (nem fuzzy) függvények.
- Ha $x_1 = A_{1,i} \ldots x_n = A_{n,i}, akkor\ y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$
- Ha w_i a szabály illeszkedési mértéke, akkor
- $y = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i f_i(x_1,\ldots,x_n)}{\sum_{i=1}^{r} w_i}$
- Nulladrendű esetben: $y = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i c_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i}$



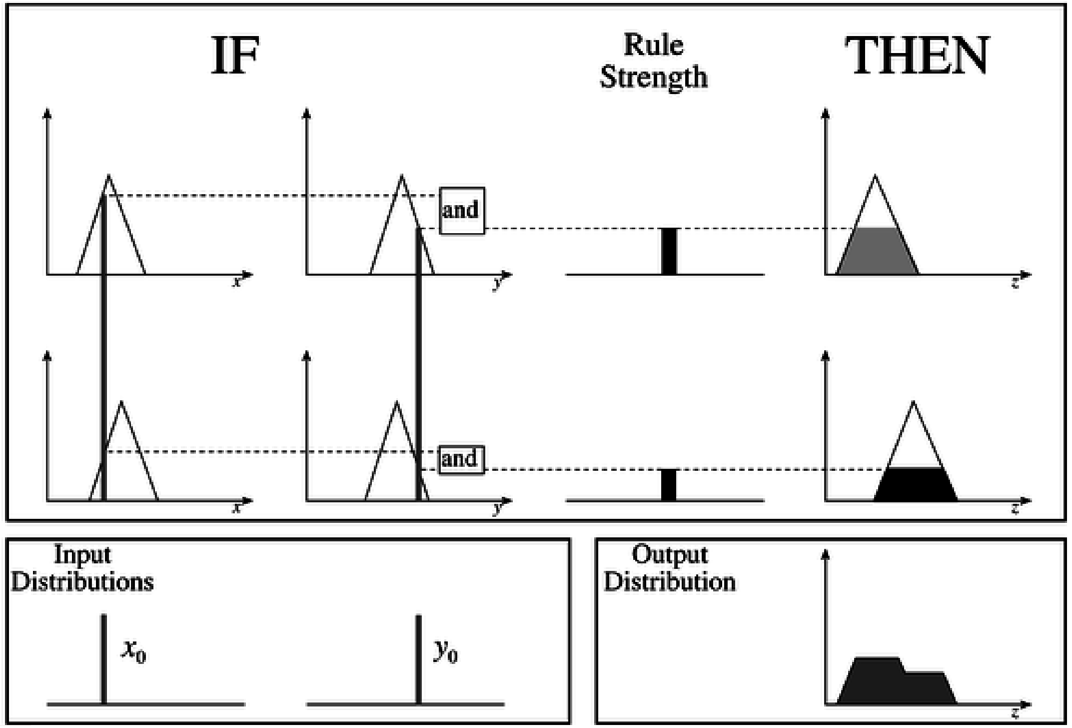
Mamdani féle irányítás 1.

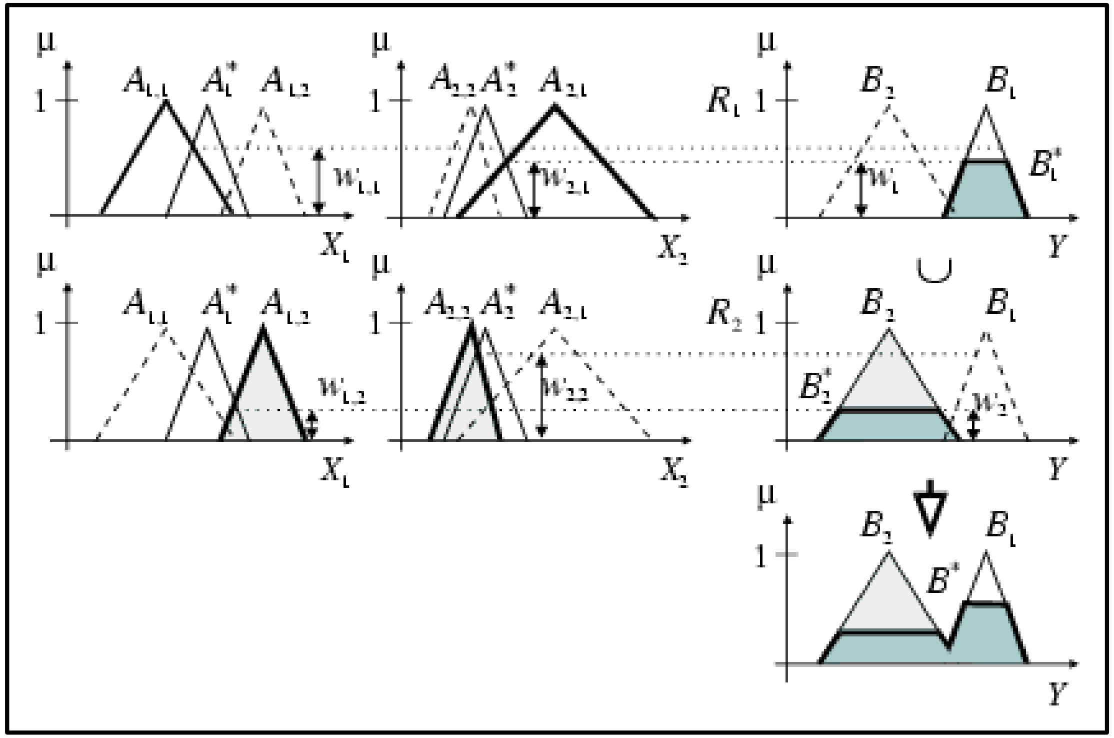
- Adott n darab mérés, $A^* = X_n$ bemenettel, és r darab szabály. Ekkor a mérési vektor illeszkedése ($j \in 1..n$):
  $$w_{i,j} = \max_{x_j}\{\min\{A_j^*, A_{j,i}(x_j)\}\}$$
- crisp bemenet esetében: $w_{i,j} = A_{j,i}(x_j)$
- Az R_i i-ik szabály alkalmazhatósága a hozzá tartozó súlyok minimuma: $w_i = \min_j(w_{j,i})$
- A szabály következtetése a hozzá tartozó B_i következtető halmaz, és az illeszkedés minimuma:
  $$B_i^* = \min\big(w_i, B_i(y)\big)$$
- A vezérlő kimenet fuzzy halmaza, az összes következtetés uniója:
  $$B^* = \bigcup_{i=1}^{r} B_i^* = max_{i=1}^{r}(B_i^*)$$

Mamdani féle irányítás 2.

Crisp bemenetek

Fuzzy bemenetek





Defuzzifikáció

- A MAMDANI-típusú következtetési algoritmusok fuzzy halmazt adnak eredményül.
- A gyakorlati alkalmazások zömében azonban a fuzzy irányítási rendszer kimeneteként egyszerű crisp numerikus értékre van szükség.
- A fuzzy konklúzióból tehát ki kell választani egy konkrét értéket, mely az adott fuzzy halmazt az alkalmazástól, illetve modellezett rendszertől függően a legjobban jellemzi.
- Ezt az eljárást *defuzzifikáció*nak nevezzük.

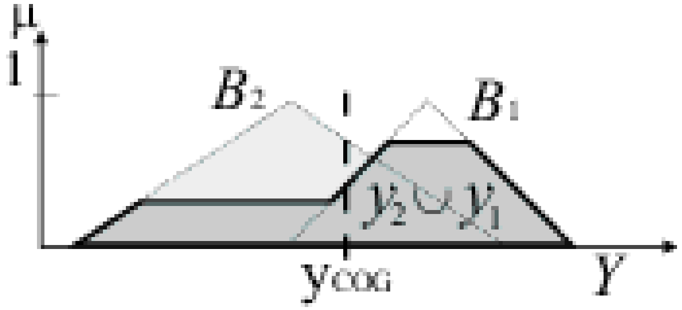
Súlypont módszer (COG)

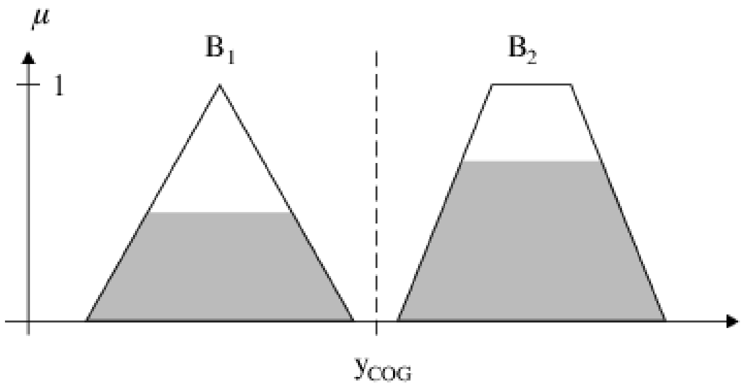
- A B^* halmaz legjellemzőbb pontjául a súlypontot (Center Of Gravity) adjuk meg, melyet az egyes B_i^* részkonklúziók súlypontjának átlagaként kapunk meg:

$$y_i^* = \frac{\int_{y\in \operatorname{supp}(B_i^*)} B_i^*(y)\, y\, dy}{\int_{y\in \operatorname{supp}(B_i^*)} B_i^*(y)\, dy}$$

$$w_i^* = \int_{y\in \operatorname{supp}(B_i^*)} B_i^*(y)\, dy$$

$$y_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^{r} (y_i^* \cdot w_i^*)}{\sum_{i=1}^{r} w_i^*}$$





COA, MOM

- Geometriai középpont módszer (COA)

$$c_{COA} = \frac{\int B^*(y)y\,dy}{\int B^*(y)\,dy}$$

- Maximumok közepe módszer (MOM)

$$c_{MOM} = \frac{\int B^*(y)y\,dy}{\int B^*(y)\,dy}, y \in MAX(B^*)$$