# Mintavételező szabályozási rendszerek.
## z-transzformáció. Átviteli függvény.

**GÁSPÁR PÉTER**

**Közlekedés-és Járműirányítási Tanszék**

MŰEGYETEM 1782

**Budapest, 2016. január**

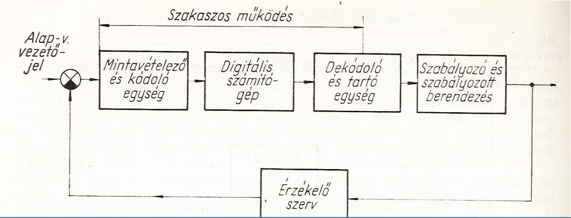
# Tartalomjegyzék

# Mintavételezés

# Mintavételezés illusztrációja

A folytonos idejű rendszer szabályozását digitális számítógéppel végezzük. Egy digitális szabályozási rendszer egyszerűsített hatásvázlatát mutatja az ábra.

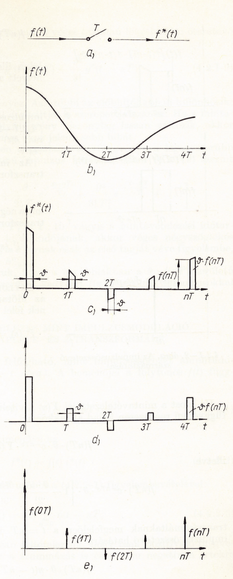
- A folytonos rendelkező jelet a mintavételező berendezés szakaszos jellé alakítja át.
- Ezután a kódoló berendezés a mintavételezési időpontokban rendelkezésre álló adatokat tartalmazó szakaszos jelet kvantálja (végesszámú számjegy) és kódolja (pl. kettes számrendszerű impulzussorozattá alakítja). A digitális számítógép feldolgozza az adatokat és ugyancsak kód formájában szolgáltatja az eredményt.
- A dekódoló egység a kimenő számjegyeket különálló mintavételezett jellé alakítja vissza.
- A szabályozási rendszer egyéb részei folytonos (esetenként diszkrét) működésűek.



# Mintavételező eljárás

Mintavételező eljárásnak nevezzük azt a folyamatot, amelynek során a folytonos jel szabályosan elosztott adatsorozattá alakul át. A feladatot végrehajtó komponenst mintavételező szervnek nevezzük.

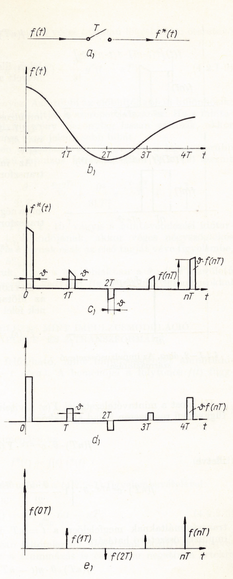
- Az ábrasor egy mintavételezési eljárást mutat, amelyben a mintavételező szervet egy állandó T időközönként nagyon rövid $\nu$ időtartamra záródó érintkező jelképezi.
- A mintavételezés eredményeként az $f(t)$ folytonos függvényből az $f^*(t)$ mintavételezett, szakaszos függvény áll elő, amely $\nu$ széles különálló pulzusok sorozatának tekinthető. Ezt hívjuk fizikai mintavételezésnek.
- Minél rövidebb a mintavételezési idő, annál kevésbé változhat a jel a mintavételezés közben. A mintavételezett jelet négyszöglökések sorozatával közelítik.



# Matematikai mintavételezés

Mintavételező eljárásnak nevezzük azt a folyamatot, amelynek során a folytonos jel szabályosan elosztott adatsorozattá alakul át. A feladatot végrehajtó komponenst mintavételező szervnek nevezzük.

- A lökéshullám területét vesszük arányosnak a folytonos időfüggvény értékével. Egy-egy négyszöglökést impulzussal helyettesíthetünk, azaz végtelen amplitudójú, végtelenül kis időtartamú, területe viszont véges értékű, mégpedig az $nT$ időpontban $f(nT)$ értékével arányos. Az arányossági tényező $\nu$ értékű. Az arányossági tényezőt 1-nek veszik a gyakorlatban.
- A mintavételező T periódusonként zár és a keletkező impulzus területe megegyezik az $f(nT)$ függvényértékkel. Ezt hívjuk matematikai mintavételezésnek.



# Diszkrét Laplace-transzformált

# Mintavételezett függvény

A mintavételező eljárás felfogható, mint impulzussorozat amplitúdó modulációja.
A bemenőjel a folytonos

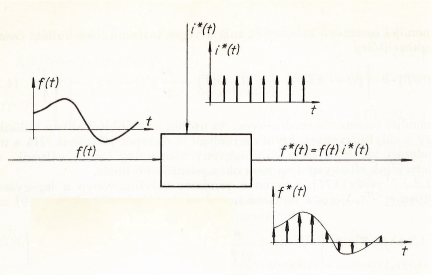
$$f(t),$$

a modulálandó jel egységimpulzus sorozat:

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT),$$

a kimenőjel a modulált impulzussorozat:

$$f^*(t) = f(t)i^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$




Az impulzusfüggvényben $\delta(t - nT)$ mindenütt zérus, kivéve $t = nT$ időpontban, ezért a mintavételezett függvény a következő alakban is kifejezhető:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

# Diszkrét Laplace-transzformált

Mivel $f(nT)$ állandó, ezért $f^*(t)$ Laplace-transzformáltja egyszerűen meghatározható:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}$$

Ezt **diszkrét Laplace-transzformáltnak** nevezzük.

Ha az $F^*(s)$ diszkrét Laplace-transzformáltban bevezetjük az $e^{Ts} = z$ helyettesítést, a mintavételezett $f^*(t)$ **függvény z transzformáltját** kapjuk:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

- Fontos hangúlyozni, hogy F(z) más függvényt ad a z változóra nézve, mint F(s) az s változóra nézve.
- Az eljárás előnye az egyszerűség, hátránya a végtelen sorral való kifejezés.
- Megjegyzés: Dirac delta függvény Laplace transzformáltja: $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$, de $\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$. Bizonyítás: $\mathcal{L}(\delta(t-c)) = \int_0^{\infty} \delta(t-c) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c) e^{-st} dt = e^{-cs}$

# Példák

1. Példa

Határozzuk meg az $f(t) = 1(t)$ egységugrás függvény z-transzformáltját.

Megoldás:

A kimenőjel a modulált impulzussorozat:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT).$$

A diszkrét Laplace-transzformált:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}.$$

A z-transzformált:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

ahol a geometriai (mértani) sorokra vonatkozó összefüggést használtuk ki.

Megjegyzés: $S_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1}$, $S_n$-t kifejezve:

$S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$. Az összeg konvergenciája:

$$lim_{n \to \infty} S_n = lim_{n \to \infty} a_1 (q^n - 1)/(q - 1) = a_1/(1 - q)$$

# Példák

2. Példa

Határozzuk meg az $f(t) = e^{-\alpha t}$ exponenciális függvény z-transzformáltját.

Megoldás:

A kimenőjel a modulált impulzussorozat:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T} \delta(t - nT).$$

A diszkrét Laplace-transzformált:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n T} e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\alpha+s)T} = \frac{1}{1 - e^{-Ts} e^{-\alpha n T}}.$$

A z-transzformált:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z e^{\alpha T})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{-\alpha T})^{n} = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}.$$

ahol a geometriai sorokra vonatkozó összefüggést használtuk ki.

# Zárt képlet a diszkrét Laplace-transzformált meghatározására

Az $F(s)$ Laplace-transzformáltat törtfüggvényként feltételezve

$$F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$$

ahol $F_z(s)$ a zérushelyeket megadó számláló, $F_p(s)$ a pólusokat megadó nevező.
A diszkrét Laplace-transzformált

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^{P} Res_{p=p_i} \frac{F_z(p)}{F_p(p)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}}$$

ahol $F_z(p) = F_z(s)|_{s=p}$ és $F_p(p) = F_p(s)|_{s=p}$, továbbá $p_i$ az $F_p(s) = 0$ egyenlet egyik gyöke. P az $F(s)$ pólusainak száma.
Egyszeres pólusok esetén:

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-p_i)}}$$

ahol $F_p'(p_i) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_i}$.

# Zárt képlet a z-transzformált meghatározására

Egyszeres pólusok esetén az $e^{sT} = z$ helyettesítéssel kapható meg a z-transzformált.

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{Tp_i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \frac{z}{z - e^{Tp_i}}$$

ahol $F_z(p_i) = F_z(s)|_{s=p_i}$ és $F_p'(p_i) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_i}$.
A formula előnye, hogy a z-transzformáltat zárt alakban állítjuk elő, szemben az eddigi végtelen sor kifejezésekkel.

# Példák

3. Példa: Határozzuk meg az $f(t) = 1(t)$ egységugrás függvény z-transzformáltját.
Megoldás: Az $1(t)$ folytonos függvény Laplace-transzformáltja

$$F_s = \frac{1}{s}$$

aminek egyetlen pólusa van a $p_1 = 0$ helyen.

$$F_z(p_1) = F_z(s)|_{s=p_1} = 1|_{s=0} = 1,$$

$$F_p'(p_1) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_1} = 1|_{s=0} = 1$$

és

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_1)}{F_p'(p_1)} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{Tp_i}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

# Példák

4. Példa: Határozzuk meg az $f(t) = e^{-\alpha t}$ exponenciális függvény z-transzformáltját.
Megoldás: Az $e^{-\alpha t}$ folytonos függvény Laplace-transzformáltja

$$F_s = \frac{1}{s+\alpha},$$

aminek egyetlen pólusa van a $p_1 = -\alpha$ helyen.

$$F_z(p_1) = F_z(s)|_{s=p_1} = 1|_{s=-\alpha} = 1,$$

$$F_p'(p_1) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_1} = 1|_{s=-\alpha} = 1$$

és

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_1)}{F_p'(p_i)} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{Tp_1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\alpha T}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

# Példák

5. Példa: Határozzuk meg az

$$F_s = \frac{1}{(s+a)(s+b)},$$

$(0 < b < a)$ Laplace-transzformáltnak megfelelő z-transzformáltat.
Megoldás: Az $F_s$-nek két pólusa van a $p_1 = -a$ és $p_2 = -b$ helyeken.

$$F_z(p_1) = F_z(s)|_{s=p_1} = 1|_{s=-a} = 1, F_z(p_2) = F_z(s)|_{s=p_2} = 1|_{s=-b} = 1,$$

$$F_p'(p_1) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_1} = (2s+a+b)|_{s=p_1} = (2s+a+b)|_{s=-a} = b-a,$$

$$F_p'(p_2) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_2} = (2s+a+b)|_{s=-b} = (2s+a+b)|_{s=-b} = a-b,$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \frac{1}{1-z^{-1}e^{Tp_i}} \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{1-z^{-1}e^{-bT}} \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{z}{z-e^{-aT}} + \frac{1}{a-b}\frac{z}{z-e^{-bT}} \end{aligned}$$

# A z-transzformáció invertálása

A z-transzformáció és inverze a következőképpen definiálható:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-nT}$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz, n = 0, 1, 2, ...$$

- A $\Gamma$ zárt görbe az óramutatóval ellentétes irányban körülfogja $F(z)$ valamennyi szingularitását és az origót is, a $z = \infty$ pontot azonban nem. A $\Gamma$ görbeként az origó középpontú egységsugarú kört választjuk.
- Megjegyezzük, hogy az inverziós képlet nem adja meg a teljes időfüggvényt, hanem csak az $f(nT)$ függvényértékeket a $t = nT$ időpontokban.

# Az inverz z-transzformált kiszámítása

1. módszer: **Számítás reziduum tétellel**

$$f(nT) = \sum_{i=1}^{P} Res_{z=p_i^*} F(z) z^{n-1}$$

ahol az összegzést ki kell terjeszteni az $F(z)z^{n-1}$ valamennyi $p_i^*$ pólusára a komplex z sík $\Gamma$ görbéjén belül.
A reziduum kiszámítására a következő képletek használhatók fel.

- Ha $F(z)$ pólusai egyszeresek és a nevező gyöktényezős alakban szerepel, akkor

$$Res_{z=p_i^*} F(z) z^{n-1} = lim_{z \to p_i^*} (z - p_i^*) F(z) z^{n-1}$$

# Az inverz z-transzformált kiszámítása

A reziduum kiszámítására alkalmazható további esetek:

- Ha $F(z)$ függvény $F_p(z)$ nevezője nem gyöktényezős alakú, akkor

$$Res_{z=p_i^*} F(z) z^{n-1} = \frac{F_z(z)}{F_p'(z)} z^{n-1}|_{z=p_i^*}$$

  ahol $F_p'(p_i) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_i}$.

- Ha $F(z)$ függvénynek többszörös, például k-szoros pólusai vannak, akkor

$$Res_{z=p_i^*} F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-p_i^*)^k F(z) z^{n-1}]_{z=p_i^*}$$

# Az inverz z-transzformált kiszámítása

2. módszer: **Számítás résztörtekre bontással**
Az $F(z)$ hányadost a következő (hasonló) alakú résztörtek összegére bontjuk:

$$A_1 \frac{z}{z-\alpha}, A_2 \frac{z}{(z-\alpha)^2+\beta^2}, A_3 \frac{z(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2+\beta^2},$$

Ezek inverz z-transzformáltja ismert (könnyen kiszámítható), vagy táblázatokban is megtalálható.

# Az inverz z-transzformált kiszámítása

- 1. Példa és megoldása

$$F(z) = A_1 \frac{z}{z-\alpha}, \quad f(nT) = A_1 \alpha^n, \quad f(t) = A_1 \alpha^{t/T}$$

- 2. Példa és megoldása

$$F(z) = A_2 \frac{z}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}, \quad f(nT) = A_{2n} \sin bnT, \quad f(t) = A_{2n} \sin bt$$

ahol $A_{2n} = A_2 \sin bT$

Magyarázat: $\alpha = \cos bt$, $\beta = \sin bt$ helyettesítéssel:

$$F(z) = \frac{z \sin bT}{z^2 - 2z \cos bT + 1}, \quad f(nT) = \sin bnT, \quad f(t) = \sin bt$$

- 3. Példa és megoldása

$$F(z) = A_3 \frac{z(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}, \quad f(nT) = A_3 \cos bnT, \quad f(t) = A_3 \cos bt$$

Magyarázat: $\alpha = \cos bt$, $\beta = \sin bt$,

$$F(z) = \frac{z(z - \cos bT)}{z^2 - 2z \cos bT + 1}, \quad f(nT) = \cos bnT, \quad f(t) = \cos bt$$

Néhány példa

| $f(t)$ | $F(s)$ | $F(z)$ | $f(nT)$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ | $1$ |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ | $nT$ |
| $e^{-aT}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ | $e^{-anT}$ |
| $te^{-aT}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$ | $nTe^{-anT}$ |
| $e^{-aT}-e^{-bT}$ | $\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$ | $e^{-anT}-e^{-bnT}$ |
| $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ | $\frac{z\sin bT}{z^2-2z\cos bT+1}$ | $\sin bnT$ |
| $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ | $\frac{z(z-\cos bT)}{z^2-2z\cos bT+1}$ | $\cos bnT$ |
| $e^{-at}\sin bt$ | $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ | $\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$ | $e^{-anT}\sin bnT$ |
| $e^{-at}\cos bt$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ | $\frac{z(z-e^{-aT}\cos bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$ | $e^{-anT}\cos bnT$ |

# Példa az inverz z-transzformációra

1. Példa: Határozzuk meg az alábbi függvénye inverzét

$$F(z) = \frac{\alpha T z}{(z-\alpha)^2}, \quad \alpha < 1$$

Megoldás: Az $F(z)$ függvénynek többszörös pólusa van

$$Res_{z=p_i^*} F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-p_i^*)^k F(z) z^{n-1}]_{z=p_i^*}$$

alapján (k=2):

$$Res_{z=\alpha} \frac{\alpha T z^n}{(z-\alpha)^2} = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} [(z-\alpha)^2 \frac{\alpha T z^n}{(z-\alpha)^2}]_{z=\alpha}$$
$$= \alpha T n \alpha^{n-1} = T n \alpha^n$$

A megoldás:

$$f(nT) = T n \alpha^n, \quad f(t) = t \alpha^n$$

Vegyük azt a példát, ahol $\alpha = -e^{-aT}$

$$f(nT) = T n e^{-aTn}, \quad f(t) = t e^{-at}$$

# Példa az inverz z-transzformációra

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi függvénye inverzét

$$F(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)}$$

Megoldás: Az $F(z)$ függvény pólusai: $p_1^* = 1$, $p_2^* = 0.052 + j0.605$, $p_3^* = 0.052 - j0.605$. Az alkalmazott összefüggés:

$$Res_{z=p_i^*} F(z)z^{n-1} = lim_{z \to p_i^*}(z - p_i^*)F(z)z^{n-1}$$

alapján $p_1^* = 1$ esetben:

$$lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1.264z^{n+1}}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)} = \frac{1.264 \cdot 1^{n+1}}{1 - 0.104 + 0.368} = 1$$

$p_2^* = 0.052 + j0.605$ esetben:

$$lim_{z\to 0.052+j0.605}(z - 0.052 - j0.605)\frac{1.264z^{n+1}}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)}$$
$$= \frac{1.264 \cdot (0.052 + j0.605)^{n+1}}{(-0.948 + j \cdot 0.605)j \cdot 1.21}$$

$p_3 * = 0.052 - j0.605$ esetben: ...

# Példa az inverz z-transzformációra

2. Példa: Határozzuk meg az alábbi függvénye inverzét

$$F(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2-0.104z+0.368)}$$

Megoldás: Résztörtekre bontással:

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{(0.5+j\cdot 0.265)z}{z-(0.052+j\cdot 0.605)} - \frac{(0.5-j\cdot 0.265)z}{z-(0.052-j\cdot 0.605)}$$

Az utolsó két tagot átalakítjuk. Legyen

$$e^{-(a+jb)} = e^{-a}\cos b - je^{-a}\sin b = 0.052 + j\cdot 0.605,$$

aminek megoldása: $a = 0.5$ és $b = -1.487$.

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{(0.5+j\cdot 0.265)z}{z-e^{-(0.5-j1.487)}} - \frac{(0.5-j\cdot 0.265)z}{z-e^{-(0.5+j1.487)}}$$

A táblázat alapján:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - (0.5+j\cdot 0.265)\cdot e^{-(0.5-j1.487)\cdot t/T} - (0.5-j\cdot 0.265)\cdot e^{-(0.5+j1.487)\cdot t/T} \\ &= 1 - e^{-0.5t/T}[\cos(1.487\cdot t/T) - 0.53\cdot\sin(1.487\cdot t/T)] \end{aligned}$$

# z-transzformáltra vonatkozó tételek

- Linearitás (szuperpozició) tétele
  Ha $Z^*[f_1(t)] = F_1(z)$ és $Z^*[f_2(t)] = F_2(z)$, akkor
  $$Z^*[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z),$$
  azaz összegfüggvény z-transzformáltja az összetevők z-transzformáltjának összege.
  Másrészről $Z^*[af(t)] = aF(z)$, azaz arányosan megnövelt $f(t)$ időfüggvény z-transzformáltja ugyanolyan arányban nő.
- Eltolás időtartományban
  Ha $Z^*[f(t)] = F(z)$, akkor
  $$Z^*[f(t - hT)] = z^{-h} F(z)$$
  ahol $h = 0, 1, 2, \ldots$ Az időtartományban a függvényt $hT$ idővel késleltetve, a z-tartományban $z^{-h}$ tényezővel kell szorozni.
  Példa: Határozzuk meg az $1(t - T)$ függvény z-transzformáltját. Mivel
  $$Z^*[1(t)] = \frac{z}{z-1}$$
  ezért
  $$Z^*[1(t - T)] = z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

# z-transzformáltra vonatkozó tételek

- Léptékváltozás a z-tartományban
  Ha $Z^*[f(t)] = F(z)$, akkor
  $$Z^*[e^{\pm at} f(t)] = F(z)(e^{\pm aT} z), \quad a > 0$$
  azaz az időtartományban $e^{\pm at}$ exponenciális függvénnyel való szorzásnak a z-tartományban léptékváltoztatás felel meg.
  Példa: Határozzuk meg az $te^{aT}$ függvény z-transzformáltját. Mivel
  $$Z^*[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$
  ezért
  $$Z^*[te^{-aT}] = \frac{Tze^{-aT}}{(ze^{-aT}-1)^2} = \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

# z-transzformáltra vonatkozó tételek

- Kezdeti értékre vonatkozó tétel
  Ha $Z^*[f(t)] = F(z)$, akkor

$$f(0T) = lim_{n\to 0} f(nT) = lim_{z\to\infty} F(z)$$

azaz a mintavételezett függvény kezdeti értéke megítélhető a z-transzformált viselkedéséből, a z-tartomány végtelen pontjának közelében.

Példa: Az

$$F(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2-0.104z+0.368)}$$

függvény inverzének kezdeti értéke

$$f(0T) = lim_{n\to\infty} f(nT) = lim_{z\to\infty} \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2-0.104z+0.368)} = 0.$$

# z-transzformáltra vonatkozó tételek

- Végértékre vonatkozó tétel
  Ha $Z^*[f(t)] = F(z)$ és $F(z)$-nek nincsenek pólusai az egységsugarú körön kívül, akkor
  $$lim_{n\to\infty} f(nT) = lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$
  azaz a mintavételezett függvény viselkedése nagy n-re meghatározható az $F(z)(z-1)/z$ függvény viselkedéséből $z = 1$ pont környezetében.
  Példa: Az
  $$F(z) = \frac{1.264z^2}{(z-1)(z^2 - 0.104z + 0.368)}$$
  függvény inverzének állandósult értéke
  $$lim_{n\to\infty} f(nT) = lim_{z\to 1} \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368} = 1.$$

# Átviteli függvények

# Mintavételező rendszerek átviteli függvényei

Az $u(t)$ folytonos jelet mintavételezzük, majd az $u^*(t)$ mintavételezett jel a $g(t)$ súlyfüggvényű tagon halad keresztül. Az utóbbi kimenetén $y(t)$ folytonos jel keletkezik. A kimeneten mindig feltételezhetünk egy fiktív mintavételezőt, amely $y(t)$ jelből $y^*(t)$ mintavételezett kimenőjelet állít elő. A rendszerben szereplő két mintavételkező szervről feltételezzük, hogy szinkron működnek.

- Az $u^*(t)$ jel impulzussorozat:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT).$$

- A $t = kT$ időpontban ható $u(kT)\delta(t - kT)$ impulzus hatására a kimeneten $u(kT)g(t - kT)$ folytonos jelösszetevő keletkezik. Ez a $t = nT$ időpontban $u(kT)g(nT - kT)$ értékű.
- A $t = nT$ időpontban a teljes kimenőjel értékét úgy kapjuk meg, ha valamennyi bemenőjel összetevő hatását figyelembe vesszük:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} g(nT - kT)u(kT)$$

  Ezt nevezzük a folytonos függvények konvolúciós összegzésének. Fizikailag megvalósítható $g(t)$ súlyfüggvények esetén az összegzés felső határa változik, hiszen $g(nT - kT) = 0$, ha $k > n$.

# Mintavételező rendszerek átviteli függvényei

- A mintavételezett kimenőjel

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(nT - kT)u(kT)\delta(t - nT)$$

- Áttérve a Laplace-transzformáltra és $n_k = n - k$ index helyettesítéssel:

$$y^*(s) = \sum_{n_k=-k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(n_k T)u(kT)e^{-n_k T s}e^{-kTs}$$
$$= \sum_{n_k=0}^{\infty} g(n_k T)e^{-n_k T s}\sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}$$

ahol figyelembe vettük, hogy $g(n_k T) = 0$, ha $n_k < 0$.

- A diszkrét Laplace-transzformáció definiciója:

$$y^*(s) = G^*(s)u^*(s)$$

# Mintavételező rendszerek átviteli függvényei

- Az $e^{sT} = z$ helyettesítéssel

$$y^*(z) = \sum_{n_k=0}^{\infty} g(n_k T) z^{-n_k} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}$$

- A z-transzformáció definiciója alapján:

$$y(z) = G(z)u(z)$$

ahol $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}$, $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n}$ azaz

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{n_k=0}^{\infty} g(n_k T) z^{-n_k}$$

A mintavételező rendszer $G(z)$ átviteli függvényét z-átviteli függvénynek nevezzük.

- Megjegyezzük, hogy az összefüggés csak a mintavételezett időpontokban adja meg az $y(t)$ értékét, hiszen a z-transzformáció csak mintavételezett függvényekre alkalmazható.

# Példa

Legyen $g(t) = e^{-at}$ és $u(t) = e^{-bt}$. Ebből

$$G^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}e^{-aT}}, G(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$U^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}e^{-bT}}, U(z) = \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

A kimenőjel diszkrét Laplace transzformáltja:

$$Y^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}e^{-aT}} \frac{1}{1 - e^{-Ts}e^{-bT}}$$

és a z-transzformáltja:

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

Résztörtekre bontással

$$Y(z) = \frac{e^{-aT}}{e^{-aT} - e^{-bT}} \frac{z}{z - e^{-aT}} + \frac{e^{-bT}}{e^{-bT} - e^{-aT}} \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

inverz z-transzformációval:

$$y(nT) = \frac{e^{-aT}}{e^{-aT} - e^{-bT}} e^{-naT} + \frac{e^{-bT}}{e^{-bT} - e^{-aT}} e^{-nbT}$$

# Matlab gyakorlat

# Matlab gyakorlat

Feladat: Vizsgáljuk egy rendszer bemenő és kimenőjeleit különböző mintavételi idők alkalmazásával.

A szimulációs lépések:

- Legyen a bemenet normál eloszlású, 0 átlagú, 1 varianciájű jel. Erősítsük a jel nagyságát K-val. Alkalmazzuk például a Random Number generálást Simulinkben. .
- Vezessük át egy rendszeren, amit átviteli függvénnyel definiálunk, pl. számláló és nevező polinomokkal, vagy PID átviteli függvény struktúrában P, I, D komponensekkel. Alkalmazzuk például a Transfer Fcn vagy a PID Controller blokkokat Simulinkben.
- A bemenő és kimenőjeleket mintavételezzük. A mintavételezett jelekre tegyünk zérusrendű tartót vagy elsőrendű tartót. Simulinkben Zero-Order Hold vagy First-Order Hold blokkokat alkalmazzuk.
- Végül tegyünk monitorokat (pl. Scope) a folytonos és mintavételezett jelek mindegyikére. Rajzoljuk a jeleket egymásra, rajzoljuk fel a különbségüket. Számoljunk ki néhány jellemzőt, pl. átlag, variancia, eltérés.
- Módosítsuk a paramétereket, pl. gerjesztés jellemzőit, átviteli függvény jellemzőit, tartószerv típusát.

A megoldás egy lehetséges módját mutatja az alábbi ábra: