Diszkrét átviteli függvények. Elemzések.

GÁSPÁR PÉTER

Közlekedés-és Járműirányítási Tanszék

MŰEGYETEM 1782

Budapest, 2016. január

Tartalomjegyzék

Lineáris diszkrét modellek

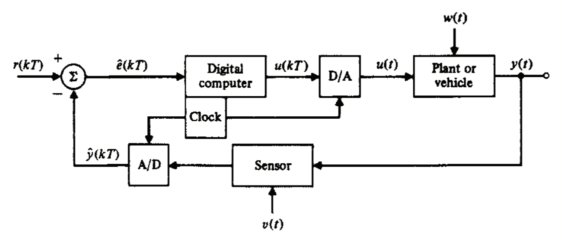
Lineáris differencia egyenletek

A számítógép bemenetei $e_0, e_1, ..., e_k$, kimenetei $u_0, u_1, ..., u_k$. Az u_k értéke kifejezhető a korábbi bemenetek és kimenetek függvényében.

$$u_k = f(e_0, e_1, ..., e_k, u_0, u_1, ..., u_{k-1}).$$

Feltesszük, hogy u_k az f lineáris függvény véges számú e és u értékeivel írható le.

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - ... - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + ... + b_m e_{k-m}$$



Diszkrét átviteli függvény

Az $e_0, e_1, ..., e_k, ...$ bemenetekre alkalmazzuk a z-transzformációt:

$$E(z) = Z\{e_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k}$$

Az $u_0, u_1, ..., u_k$ kimenetekre is alkalmazzuk a z-transzformációt:

$$U(z) = Z\{u_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$$

Az átviteli függvény:

$$H(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

Példa egy átviteli függvényre. Induljunk ki a trapézszabály alábbi közelítéséből:

$$u_k = -u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_k + e_{k-1})$$

Szorozzuk mindkét oldalt z^{-k}-val és összegezzük k-ig:

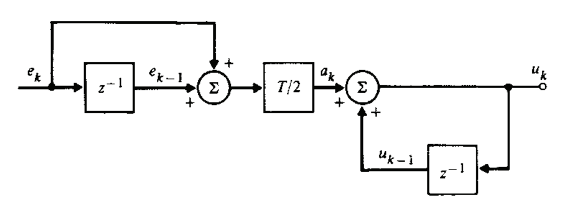
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = -\sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} + \frac{T}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1} z^{-k}\right)$$

Átalakításokkal:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}(E(z) + z^{-1}E(z))$$

Az átviteli függvény:

$$H(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

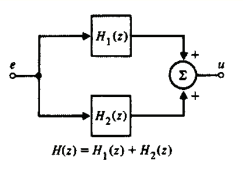


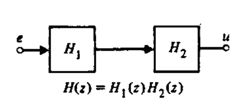
Diszkrét átviteli függvény

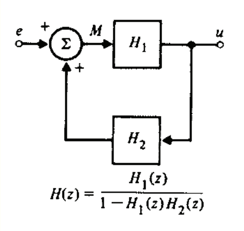
A diszkrét átviteli függvény általános alakja:

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

Az átviteli függvények párhuzamos, soros és visszacsatolt kapcsolásait mutatják az ábrák.







Tetszőlegesen kapcsolt rendszerek eredő átviteli függvényét a fenti alapkapcsolások felhasználásával írhatjuk fel.

Irányíthatósági alak

A diszkrét átviteli függvény általános alakja:

$$U(z) = H(z)E(z) = \frac{b(z)}{a(z)}E(z) = b(z)\xi$$

ahol

$$\xi = \frac{E(z)}{a(z)}$$
$$a(z)\xi = E(z)$$

Példa: Az átviteli függvény:

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

Részletezve:

$$(z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)\xi = e$$
$$(b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3)\xi = u$$

Irányíthatósági alak

$$z^3\xi = e - a_1 z^2\xi - a_2 z\xi - a_3\xi$$
$$\xi(k+3) = e(k) - a_1\xi(k+2) - a_2\xi(k+1) - a_3\xi(k)$$

Állapotváltozókat vezetünk be:

$$x_1(k+1) = -a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - a_3x_3(k) + e(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k)$$
$$x_3(k+1) = x_2(k)$$

Az állapotegyenlet:

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c e(k)$$

ahol $A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A kimenőjel

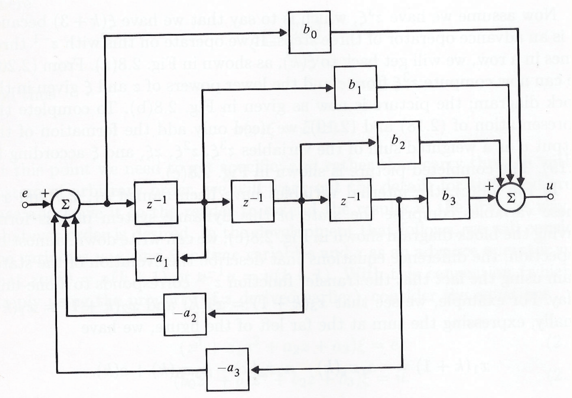
$$u = (b_1 - a_1b_0)x_1 + (b_2 - a_2b_0)x_2 + (b_3 - a_3b_0)x_3 + b_0e$$

alapján a kimeneti egyenlet:

$$u(k) = C_c x(k) + D_c e(k)$$

ahol $C_c = \begin{bmatrix} b_1 - a_1b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_3 - a_3b_0 \end{bmatrix}$, $D_c = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$.

Irányíthatósági alak



Megfigyelhetőségi alak

Az állapotegyenlet:

$$x(k+1) = A_o x(k) + B_o e(k)$$

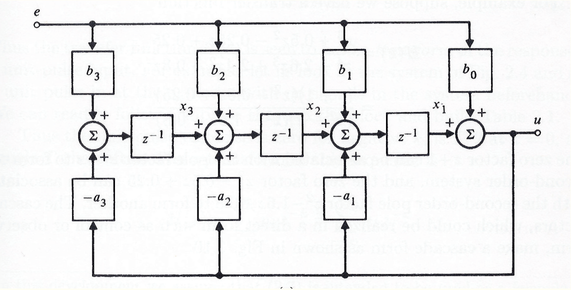
ahol $A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_o = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix}$.

A kimeneti egyenlet:

$$u(k) = C_o x(k) + D_o e(k)$$

ahol $C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_o = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$.

Megfigyelhetőségi alak



Diszkrét állapottér reprezentáció

A folytonos idejű állapottér reprezentáció alakja:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

ahol $x(0) = x(t_0)$ a kezdeti érték.
Az állapotegyenlet megoldása a következő:

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(t_0) + \int_0^{\infty} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Alkalmazzuk a mintavételezett rendszerre. Legyen $t = kT + T$ és $t_0 = kT$

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Alkalmazzunk tipikus zérusrendű tartót, azaz

$$u(\tau) = u(kT),$$

ahol $kT \leq \tau < kT + T$. Vezessük be továbbá a $\eta = kT + T - \tau$ jelölést.

Diszkrét állapottér reprezentáció

A mintavételezett rendszer állapota

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A(\eta)}d\eta Bu(KT)$$

Definiáljuk a következőket

$$\Phi = e^{AT}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A(\eta)}d\eta B$$

A diszkrét állapottér reprezentáció:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Diszkrét állapottér reprezentáció

Az állapotegyenlet mátrixainak közelítő összefüggései az alábbiak:

$$\begin{aligned}\Phi = e^{AT} &= I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \frac{A^3T^3}{3!} + \dots \\ &= I + AT\Psi\end{aligned}$$

ahol $\Psi = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \dots$.

$$\begin{aligned}\Gamma = \int_0^T e^{A(\eta)} d\eta B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} TB = \Psi TB\end{aligned}$$

Az átviteli függvény:

$$\begin{aligned}(zI - \Phi)X(z) &= \Gamma U(z) \\ Y(z) &= CX(z)\end{aligned}$$

alapján

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma$$

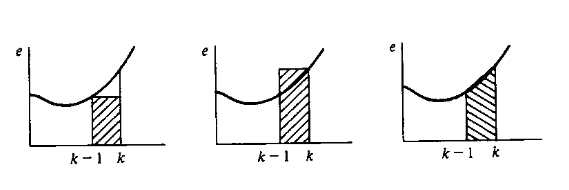
Folytonos átviteli függvény diszkrét ekvivalense

Egy folytonos függvény közelítése

Legyen $e(t)$ folytonos függvény. Az ábrán látható módon $e(0), e(1), ..., e(t_{k-1}), e(t_k)$ értékekkel szegmentáljuk és ezekből az értékekből kívánjuk közelíteni az alábbi integrált:

$$J = \int_0^t e(t)dt$$

Feltesszük, hogy az integrál közelítése 0-tól t_{k-1}-ig rendelkezésre áll és ezt u_{k-1}-el jelöljük. A feladat az u_k közelítése. Attól függően, hogy u_{k-1} mellett az e_{k-1}-et, az e_k-t, vagy mind az e_{k-1}-et és az e_k-t használjuk, más módszerhez jutunk.



Függvény közelítése

- Trapéz szabály
  A kijelölt terület: $A = \frac{t_k - t_{k-1}}{2}(e_k + e_{k-1})$. Ha feltesszük, hogy a mintavételi idő T állandó, akkor a következő integrál értéket kapjuk:

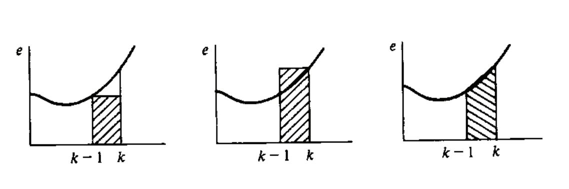
$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_k + e_{k-1})$$

- Előrefelé irányuló szabály

$$u_k = u_{k-1} + Te_{k-1}$$

- Hátrafelé irányuló szabály

$$u_k = u_{k-1} + Te_k$$



Feladat megfogalmazása

Adott $H(s)$ folytonos idejű átviteli függvény. Határozzuk meg azt a diszkrét átviteli függvényt, ami ugyanazt a karakterisztikát közelíti.
Három megközelítést alkalmazunk:

- numerikus integrálás
- pólus-zérus leképezés

Numerikus integrálás

Legyen az átviteli függvény alakja a következő:

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}$$

ami a következő differenciálegyenletnek felel meg:

$$\dot{u} + au = ae.$$

Oldjuk meg a differenciálegyenletet:

$$u(t) = \int_0^t (-au(\tau) + ae(\tau))d\tau,$$

Megoldás a kT helyen:

$$\begin{aligned} u(kT) &= \int_0^{kT-T} (-au + ae)d\tau + \int_{kT-T}^{kT} (-au + ae)d\tau \\ &= u(kT-T) \\ &+ \{(-au + ae) \quad \text{területe a} \quad kT - T \leq \tau < kT \quad \text{tartományon.}\} \end{aligned}$$

A numerikus integrálás során szabályokat keresünk a terület vmeghatározására.

Numerikus integrálás

1. Forward rectangular szabály (forward Euler szabály)

$$\begin{aligned} u_1(kT) &= u_1(kT-T) + T[-au_1(kT-T) + ae(kT-T)] \\ &= (1-aT)u_1(kT-T) + aTe(kT-T) \end{aligned}$$

Az átviteli függvény:

$$H_F(z) = \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{a}{(z-1)/T+a}$$

2. Backward rectangular szabály (backward Euler szabály)

$$\begin{aligned} u_2(kT) &= u_2(kT-T) + T[-au_2(kT) + ae(kT)] \\ &= \frac{u_2(kT-T)}{1+aT} + \frac{aT}{1+aT}e(kT) \end{aligned}$$

Az átviteli függvény:

$$H_B(z) = \frac{aT}{1+aT}\frac{1}{1-z^{-1}/(1+aT)} = \frac{aTz}{z(1+aT)-1} = \frac{a}{(z-1)/(Tz)+a}$$

3. Trapezoid szabály (Tustin szabály)

$$
\begin{aligned}
u_3(kT) &= u_3(kT-T) + \frac{T}{2}[-au_3(kT-T) + ae(kT-T) - au_3(kT) + ae(kT)] \\
&= \frac{1-aT/2}{1+aT/2} u_3(kT-T) + \frac{aT/2}{1+aT/2}[e_3(kT-T) + e_3(kT)]
\end{aligned}
$$

Az átviteli függvény:

$$
H_T(z) = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z + aT - 2} = \frac{a}{(2/T)[(z-1)/(z+1)] + a}
$$

Összefoglalva:

$H(s)$	Módszer	$H(z)$
$\frac{a}{s+a}$	Forward szabály	$H_F(z) = \frac{a}{(z-1)/T+a}$
$\frac{a}{s+a}$	Backward szabály	$H_B(z) = \frac{a}{(z-1)/(Tz)+a}$
$\frac{a}{s+a}$	Trapezoid szabály	$H_T(z) = \frac{a}{(2/T)[(z-1)/(z+1)]+a}$

Numerikus integrálás

A $H(s)$ és a $H(z)$ összehasonlítása alapján a három megközelítés a következőt mutatja:

Módszer	Közelítés
Forward szabály	$s \leftarrow \frac{z-1}{T}$
Backward szabály	$s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$
Trapezoid szabály	$s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

A közelítések alapján z kifejezhető s-sel.

Módszer	Közelítés
Forward szabály	$z = 1 + Ts$
Backward szabály	$z = \frac{1}{1-Ts}$
Trapezoid szabály	$z = \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$

Állapottér reprezentáció numerikus integrálás módszere alapján

$$\dot{x} = Ax + Be$$
$$u = Cx + De$$

Laplace transzformált:

$$sX = AX + BE$$
$$U = CX + DE$$

Vizsgáljuk a **forward rectangular szabályt** ($s \leftarrow \frac{z-1}{T}$) és alakítsuk át az állapotegyenletet:

$$\frac{z-1}{T}X = AX + BE$$

Időtartományban a z operátor előretol (forward shift), azaz $zx(k) = x(k+1)$

$$x(k+1) - x(k) = TAx(k) + TBe(k)$$
$$x(k+1) = (I + TA)x(k) + TBe(k)$$

és a kimeneti egyenlet:

$$u(k) = Cx(k) + De(k)$$

Állapottér reprezentáció numerikus integrálás módszere alapján

Vizsgáljuk a **backward rectangular szabályt** ($s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$) és alakítsuk át az állapotegyenletet:

$$\frac{z-1}{Tz}X = AX + BE$$

Időtartományban

$$x(k+1) - x(k) = TAx(k+1) + TBe(k+1)$$

$$x(k+1) - TAx(k+1) - TBe(k+1) = x(k)$$

Vezessük be a w új változót a következő definicióval:

$$w(k+1) = x(k)$$

A jelek közötti kapcsolat:

$$(I - AT)x = w + TBe$$

$$x = (I - AT)^{-1}w + (I - AT)^{-1}BTe$$

A fenti definició alapján:

$$w(k+1) = (I - AT)^{-1}w(k) + (I - AT)^{-1}BTe(k)$$

és a kimeneti egyenlet:

$$u(k) = Cx(k) + De(k) = Cw(k+1) + De(k)$$

$$= C(I - AT)^{-1}w(k) + [D + C(I - AT)^{-1}BT]e(k)$$

Állapottér reprezentáció numerikus integrálás módszere alapján

Vizsgáljuk a **trapezoid szabályt** ($s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$) és alakítsuk át az állapotegyenletet:

$$\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}X = AX + BE$$
$$(z-1)X = \frac{AT}{2}(z+1)X + \frac{BT}{2}(z+1)E$$

Időtartományban

$$x(k+1) - x(k) = \frac{AT}{2}[x(k+1) + x(k)] + \frac{BT}{2}[e(k+1) + e(k)]$$
$$x(k+1) - \frac{AT}{2}x(k+1) - \frac{BT}{2}e(k+1) = x(k) + \frac{AT}{2}x(k) + \frac{BT}{2}e(k)$$

Vezessük be a w új változót a következő definicióval:

$$\sqrt{T}w(k+1) = x(k) + \frac{AT}{2}x(k) + \frac{BT}{2}e(k)$$

A jelek közötti kapcsolat:

$$(I - \frac{AT}{2})x = \sqrt{T}w + \frac{BT}{2}e$$
$$x = (I - \frac{AT}{2})^{-1}\sqrt{T}w + (I - \frac{AT}{2})^{-1}\frac{BT}{2}e$$

Állapottér reprezentáció numerikus integrálás módszere alapján

Az összefüggést helyettesítsük vissza az állapotegyenletbe:

$$\sqrt{T}w(k+1) = (I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1}\{\sqrt{T}w(k) + \frac{BT}{2}e(k)\} + \frac{BT}{2}e(k)$$

$$\begin{aligned} w(k+1) &= (I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1}w(k) + \{(I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1} + I\}\frac{B\sqrt{T}}{2}e(k) \\ &= (I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1}w(k) + (I - \frac{AT}{2})^{-1}B\sqrt{T}e(k) \end{aligned}$$

és a kimeneti egyenlet:

$$\begin{aligned} u(k) &= Cx(k) + De(k) \\ &= \sqrt{T}C(I - \frac{AT}{2})^{-1}w(k) + \{D + C(I - \frac{AT}{2})^{-1}\frac{BT}{2}\}e(k) \end{aligned}$$

Állapottér reprezentáció numerikus integrálás módszere alapján

Az eredményeket egy táblázatba foglaljuk:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t)$$
$$u(t) = Cx(t) + De(t)$$

Diszkrét ekvivalens alakja:

$$w(k+1) = \Phi w(k) + \Gamma e(k)$$
$$u(k) = Hw(k) + Je(k)$$

A közelítések alapján z kifejezhető s-sel.

	Forward	Backward	Trapezoid
Φ	$(I + AT)$	$(I - AT)^{-1}$	$(I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1}$
Γ	BT	$(I - AT)^{-1}BT$	$(I - \frac{AT}{2})^{-1}B\sqrt{T}$
H	C	$C(I - AT)^{-1}$	$\sqrt{T}C(I - \frac{AT}{2})^{-1}$
J	D	$D + C(I - AT)^{-1}BT$	$D + C(I - \frac{AT}{2})^{-1}\frac{BT}{2}$

Pólus-zérus leképezés

A szabályok a következők:

- 1. szabály: A $H(s)$ minden pólusának leképezése $H_{zp}(z)$-be $z = e^{sT}$. Ha $H(s)$ pólusa $s = -a$, akkor $H_{zp}(z)$ pólusa $z = e^{-aT}$. Ha $H(s)$ pólusa $s = -a + jb$, akkor $H_{zp}(z)$ pólusa $z = re^{j\theta}$, ahol $r = e^{-aT}$ és $\theta = bT$.
- 2. szabály: Minden véges zérusának leképezése $H_{zp}(z)$-be $z = e^{sT}$. Ha $H(s)$ zérusa $s = -a$, akkor $H_{zp}(z)$ pólusa $z = e^{-aT}$. Ha $H(s)$ zérusa $s = -a + jb$, akkor $H_{zp}(z)$ zérusa $z = re^{j\theta}$, ahol $r = e^{-aT}$ és $\theta = bT$.
- 3. szabály: A $H(s)$ $s = \infty$ zérusának leképezése $z = -1$.

  Megjegyzés: A $H(s)$ egy $s = \infty$ zérusának leképezése $z = \infty$. Emiatt $H_{zp}(z)$ zérusszáma kisebb, mint a véges pólusok száma, azaz nincs direkt átviteli tag.
- 4. szabály: Az erősítőt úgy kell beállítani, hogy illeszkedjen a $H(s)$ erősítéséhez. Ez a következőképpen tehető meg általában:

$$H(s)|_{s=0} = H_{zp}(z)|_{z=1}.$$

Pólus-zérus leképezés

Példa: Alkalmazzuk a szabályokat

$$H(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{\frac{1}{a}s+1}$$

átviteli függvényre. Az 1. szabály miatt $p = e^{-aT}$, a 3. szabály miatt $z = -1$ azaz

$$H_{zp}(z) = \frac{z+1}{z-e^{-aT}}$$

A 4. szabály miatt

$$H_{zp}(z)|_{z=1} = \frac{2}{1-e^{-aT}}$$

Ezért az erősítő megválasztásával:

$$H_{zp}(z) = \frac{(z+1)(1-e^{-aT})}{2(z-e^{-aT})}$$

A 3. szabály megjegyzésének figyelembe vételével:

$$H_{zp}(z) = \frac{1-e^{-aT}}{2(z-e^{-aT})}$$

Matlab gyakorlat

Feladat: Írjuk fel a

$$H(z) = \frac{z - 1}{z^2 + z + 0.3}$$

diszkrét átviteli függvény folytonos ekvivalensét zérusrendű tartó alkalmazásával. A mintavételi idő $T_s = 0.05s$.
Megoldás: A d2cm Matlab függvény alkalmazásával oldjuk meg a feladatot:

$$SYSC = D2CM(A, B, C, D, TS, METHOD)$$

ahol $SYSC$ a folytonos modell, A, B, C, D a diszkrét modell, TS a mintavételi idő, $METHOD$ az alkalmazott módszer.
A módszer a következő lehet: 'zoh': zérusrendű tartó, 'tustin': bilineáris (trapéz) közelítés.
Vizsgáljuk meg az illesztést idő és frekvencia tartományban. Vizsgáljuk meg a mintavételi idő hatását.

Házi feladat: Írjuk fel a

$$H(z) = \frac{z + 0.2}{(z + 0.5)(z^2 + z + 0.4)}$$

diszkrét átviteli függvény folytonos ekvivalensét zérusrendű tartó alkalmazásával. A mintavételi idő $T_s = 0.01s$.