Segédlet: Főfeszültségek meghatározása Mohr-féle feszültségi körök alkalmazásával

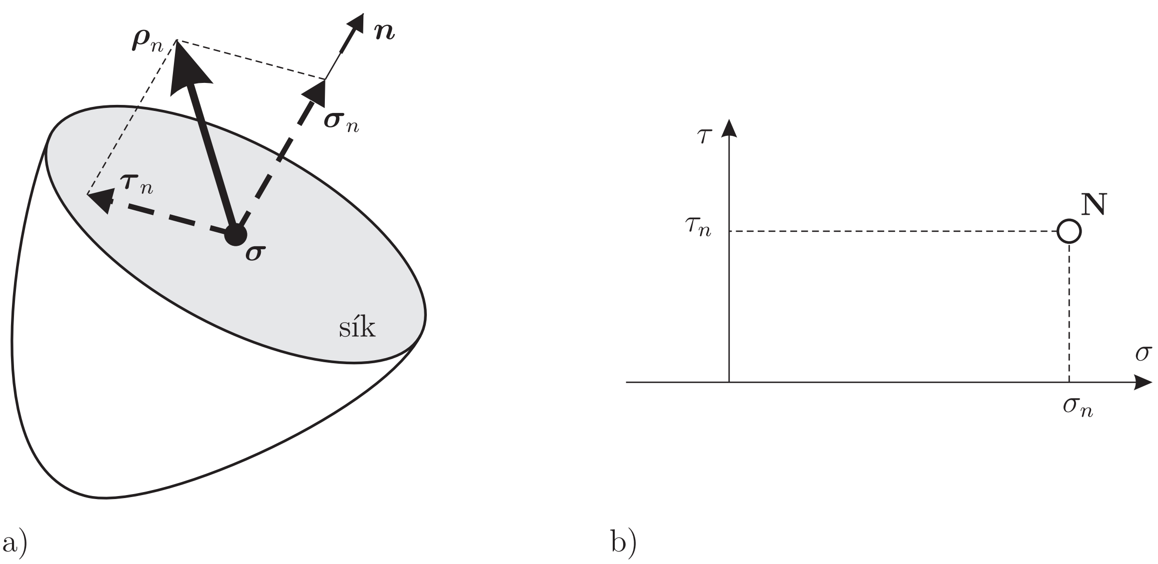
Készítette: Dr. Kossa Attila (kossa@mm.bme.hu)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
2012. október 16.

Jelen segédlet célja tömör összefoglalást adni a főfeszültségek Mohr-féle feszültségi körökkel történő meghatorozásának algoritmusáról.

Egy adott anyagi ponton átmenő $\boldsymbol{n}$ normálisú[1] síkhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort[2] a

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{1}$$

összefüggéssel számítjuk, ahol $\boldsymbol{\sigma}$ jelöli az adott pontban érvényes feszültségi tenzort. Az így kapott $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor iránya tetszőleges lehet, a tér bármely irányába mutathat. Egy általános esetet szemléltet az 1.a ábra.



1. ábra. a) A feszültségvektor felbontása b) A σ_n és τ_n értékpár megadása a σ-τ síkon

A $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort felbonthatjuk két másik vektor összegére:

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n, \tag{2}$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}_n$ a síkra merőleges, míg $\boldsymbol{\tau}_n$ a síkba eső komponens. A $\boldsymbol{\sigma}_n$ vektor megadható az $\boldsymbol{n}$ egységvektor (ami a sík normálisa) segítségével az alábbi módon:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n \boldsymbol{n}, \tag{3}$$

ahol a σ_n mennyiség jelöli a $\boldsymbol{\sigma}_n$ vektor "előjeles" hosszát: $+$ esetén a $\boldsymbol{\sigma}_n$ az $\boldsymbol{n}$ irányába mutat, míg $-$ esetén az ellentétes irányba. σ_n nem más mint a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor vetülete a normális által kijelölt egyenesre. Számítása:

$$\sigma_n = \boldsymbol{\rho}_n \cdot \boldsymbol{n}. \tag{4}$$

[1] Ahol $\boldsymbol{n}$ egységvektor
[2] Az n alsó index itt arra szándékozik utalni, hogy a számított $\boldsymbol{\rho}$ feszültségvektor függ az $\boldsymbol{n}$ irányától.

A síkra merőleges $\boldsymbol{\sigma}_n$ összetevő ismeretében a $\boldsymbol{\tau}_n$ vektor az alábbi módon számítható:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\sigma}_n. \tag{5}$$

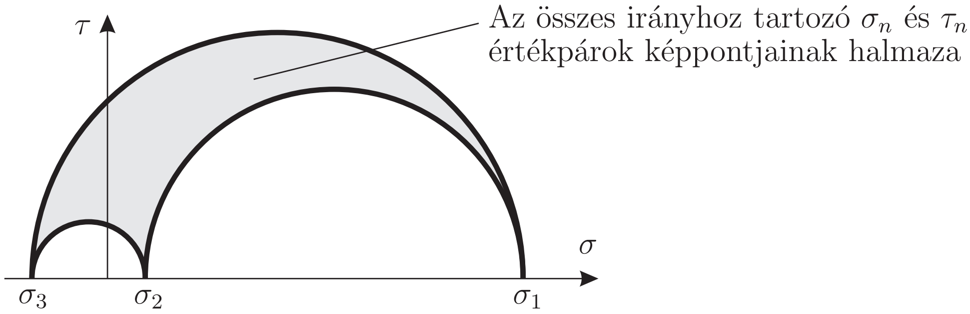
Jelölje τ_n ennek a vektornak a hosszát:

$$\tau_n = \sqrt{\boldsymbol{\tau}_n \cdot \boldsymbol{\tau}_n}. \tag{6}$$

Ez az érték minden esetben pozitív.

Végeredményben tehát az $\boldsymbol{n}$ normálisú síkhoz hozzárendelhetünk egy értékpárt: (σ_n, τ_n). Ezek azt mondják meg, hogy ha a vizsgált anyagi ponton keresztül egy $\boldsymbol{n}$ normálisú síkot fektetünk, akkor mekkora a síkhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor normálfeszültség (σ_n) és csúsztatófeszültség (τ_n) összetevője. Attól függően, hogy milyen irányú síkot vizsgálunk, más és más összetevőket kapunk.

Felvehetünk egy $\sigma - \tau$ koordinátarenszert[3], és ebben felmérhetjük egy adott irányhoz tartozó (σ_n, τ_n) értékpárt ami egy pontot jelöl ki (lásd 1.b ábrán **N** pont). Vagyis egy $\boldsymbol{n}$ irányt ebben a koordinátarendszerben egy pont jellemez. Ha az összes irányt (ami végtelen) megvizsgáljuk és kiszámítjuk a hozzájuk tartozó feszültség összetevőket és ábrázoljuk ebben a koordinátarendszerben, akkor azt vesszük észre, hogy az összes pont egy körívháromszögben helyezkedik el, amit három félkör határol[4]. Ezt szemlélteti a 2. ábrán jelölt szürke terület. A határoló félkörök metszéspontjai a σ-tengellyel a főfeszültségeket adják meg. Vagyis ezekhez a képpontokhoz tartozó $\boldsymbol{n}$ irány főfeszültségi irány. A köríveken elhelyezkedő pontok olyan irányokat jelölnek ki, melyek feszültségi fősíkokra merőlegesek.



2. ábra. Az egyes irányokhoz tartozó képpontok szemléltetése

Amennyiben egy pontbeli feszültségi állapotot úgy ismerünk a választott koordináta-rendszerben, hogy az az egyik irány főfeszültségi irány (és értelemszerűen a hozzá tartozó normálfeszültség az egyik főfeszültség), akkor a Mohr-féle feszültségi körök megszerkeszthetőek és a másik két főfeszültség meghatározható, valamint a további főirányok is számíthatóak. A számítás lépéseit az alábbi példa ismerteti.

Példa

Ismert egy pontbeli feszültségi állapot, amely a feszültségi tenzor mátrix-szával adott:

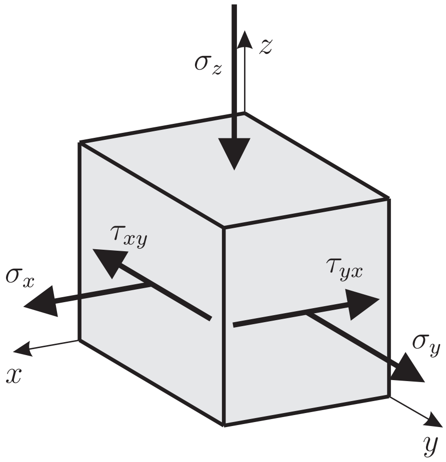
$$\underset{(x,y,z)}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & -40 & 0 \\ -40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \tag{7}$$

[3] Itt mégegyszer megjegyezzük, hogy a σ összetevő lehet + és − is, míg a τ csak +. Az egyértelműség kedvéért szokták a függőleges tengelyt $|\tau|$-val is jelölni τ helyett.

[4] Speciális eset ha a három félkör egybeesik. Ekkor a félkör kontúrján helyezkedik el az összes irányhoz tartozó képpont.

Határozzuk meg a főfeszültségeket és a hozzájuk tartozó irányokat Mohr-körök segítségével!

Első lépésben célszerű a feszültségi állapot ábrázolni kiskockán. Ezt a 3. ábra mutatja.

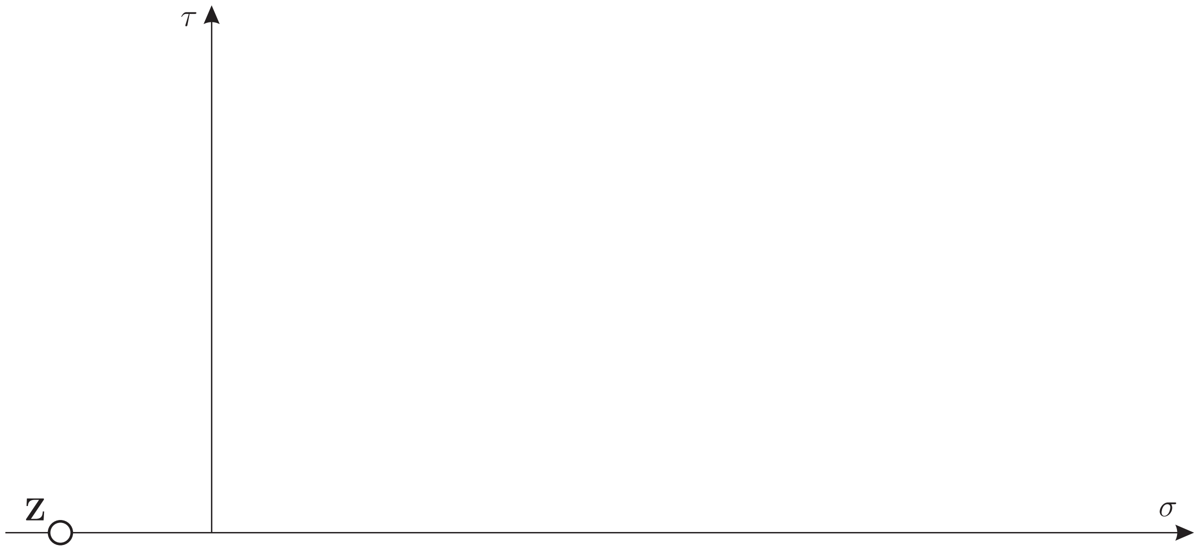


3. ábra. A feszültségi állapot szemléltetése kiskockán

A Mohr-körök szerkesztésének (lehetséges[5]) lépései az alábbiak.

$\boxed{1.}$ **Vegyük fel a σ-τ tengelypárt**.

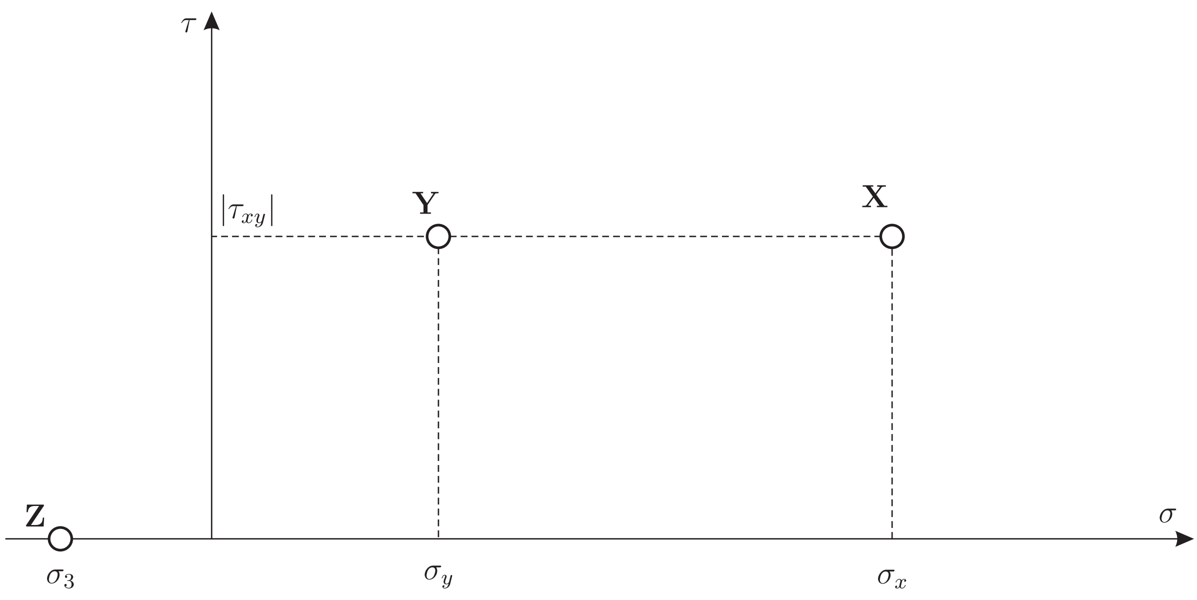
$\boxed{2.}$ **Jelöljük be az ismert főirányhoz tartozó képpontot**. Ez a pont a σ-tengelyen fekszik és a hozzá tartozó σ érték az egyik főfeszültség. Jelen esetben a z-irányról tudjuk, hogy főfeszültségi irány (mivel a rá merőleges síkon nem ébrednek csúsztatófeszültségek), vagyis a $\sigma_z = -20$ MPa lesz az egyik főfeszültség, de azt még nem tudjuk, hogy hányadik a sorban ($\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$). A z-irányhoz tartozó pontot **Z** jelöli a 4. ábrán.



4. ábra. Az ismert főirányhoz tartozó pont megadása

$\boxed{3.}$ **Szerkesszük meg a másik két irányhoz tartozó képpontokat**. Tehát mérjük fel a másik két irányhoz tartozó σ és τ értékpárokat. τ esetében mindig az abszolút értéket kell felmérni! Ezzel megkaptuk az **X** és **Y** pontokat, ahogyan azt a 5. ábra szemlélteti.

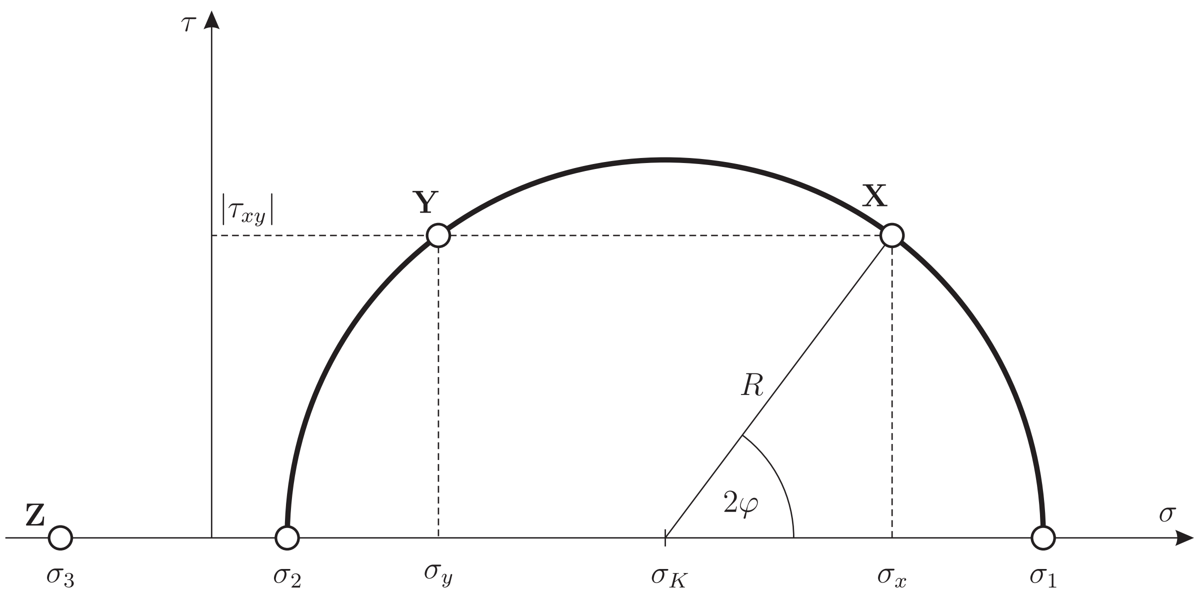
[5]Fontos kihangsúlyozni, hogy a különböző könyvekeben, jegyzetekben lehet találni másfajta ábrázolást is, ahol például teljes köröket használnak az ábrázoláshoz. Természetesen a megoldások ugyanarra az eredményre vezetnek.



5. ábra. A síkokhoz tartozó képpontok szerkesztése

$\boxed{4.}$ **Rajzoljunk félkört a szerkeszett két pont** (jelen esetben **X** és **Y**) **köré, melynek középpontja a σ-egyenesen van**. Ennek a körnek a középpontja a két pont közti σ távolság felénél lesz, jelen esetben a $\sigma_K = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = 60$ MPa metszéknél (lásd 6. ábra). A kör sugara geometriai úton meghatározható[6]:

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_K)^2 + |\tau_{xy}|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}. \tag{8}$$



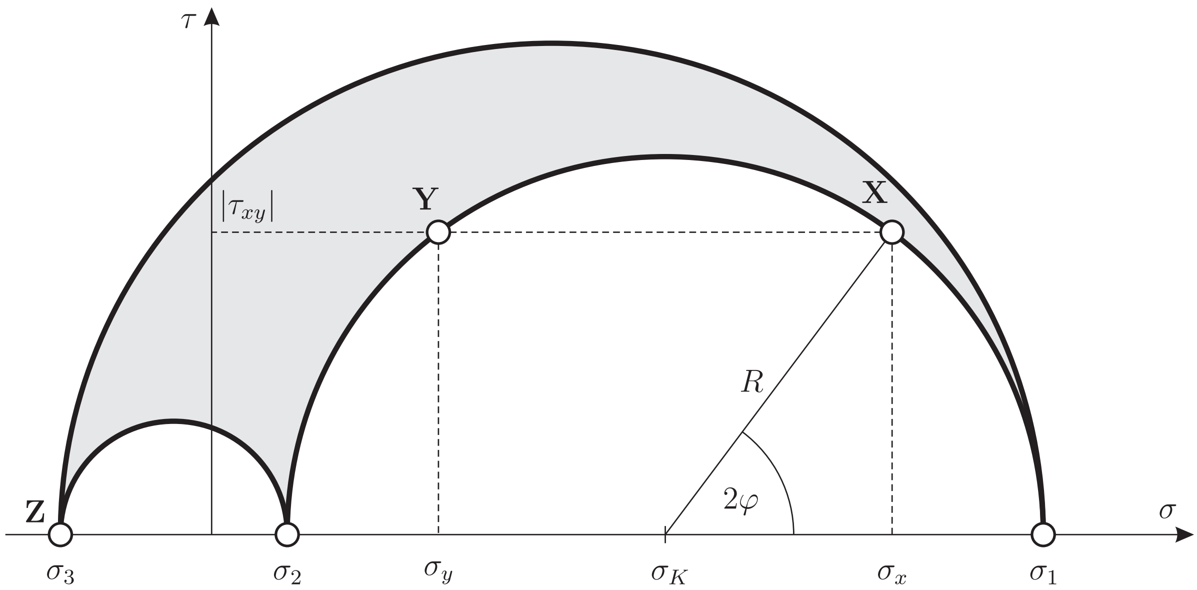
6. ábra. Mohr-kör szerkesztése

[6]Az egynletben szereplő index jelölések a jelen feladathoz igazodnak! Ha más irányhoz tartozó pontokat szerkesztettünk akkor értelemszerűen a hozzá tartozó geometriai képből kell kiindulni.

$\boxed{5.}$ **Olvassuk le a főfeszültségeket**. A keresett két másik főfeszültséget a szerkesztett félkör σ-tengellyel való metszéspontja adja, vagyis a $\sigma_K + R = 110$ MPa és a $\sigma_K - R = 10$ MPa értékek. Figyelembe véve a főfeszültségekre vonatkozó sorbarendezési szabályt, a főfeszültségekre az alábbi eredményeket kapjuk:

$$\sigma_3 = -20 \text{ MPa}, \qquad \sigma_2 = 10 \text{ MPa}, \qquad \sigma_1 = 110 \text{ MPa}. \tag{9}$$

A három főfeszültség fölé 3 félkör rajzolható[7], amiből az egyiket az előzőekben szerkesztettük meg. A másik két félkör középpontjai szintén a σ-tengelyen vannak. Jelen példánál a másik két félkör középpontjai a $(\sigma_3 + \sigma_2)/2 = -5$ és a $(\sigma_3 + \sigma_1)/2 = 45$ helyeken lesznek.



7. ábra. A feszültségi állapot szemléltetése Mohr-körökkel

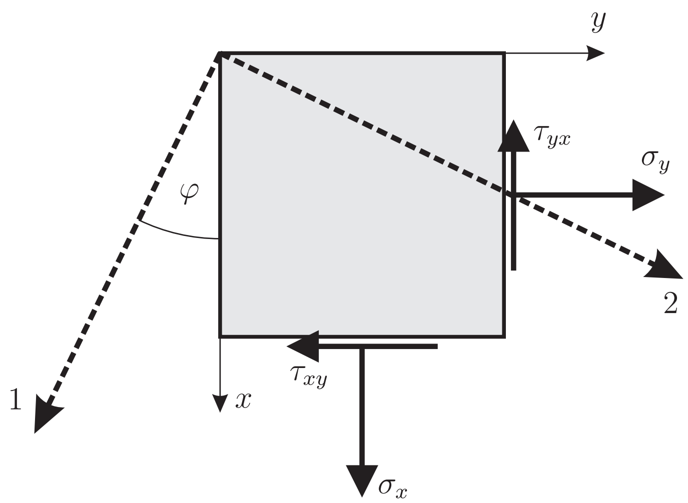
$\boxed{6.}$ **Határozzuk meg a főirányokat**. Az egyik főirány ismert a feladat elején, jelen esetben a z-irány. Mivel a **Z** pont a Mohr-körös ábrán σ_3-hoz tartozik, emiatt a z-irány leyz a 3-as főirány. Ha egy másik főirányt meghatározunk, akkor a harmadik irány kiadódik, mivel jobbsodrású koordinátarendszert kell alkossanak. A Mohr-körök segítéségvel a következőkben ismeretett módon számíthatjuk a főirányokat. Válasszuk ki a szerkesztett pontok közül azt amelyikhez nagyobb σ érték tartozik (vagyis a jobboldali pontot), jelen esetben ez az **X** pont amihez az x-irány tartozik. A félkörön tovább haladva jobbra (óramutató járásával egyező irányban) eljutunk az egyik főfeszültséghez, jelen esetben a σ_1-hez amihez az 1-es irány tartozik. A két pont között a félkörön 2φ szöget kellett haladnunk. A φ szög geometria úton számítható[8]:

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_K} = \frac{2\,|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\,|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 40}{90 - 30}\right) = 26,565\,^\circ. \tag{10}$$

A φ szög adja meg az x és az 1-es irány közti szöget, de ezzel még az nem tisztázott, hogy milyen irányba kell elforgatnunk x-t, hogy az 1-es irányt megkapjuk. Az x irányt abba az irányba kell elforgatni amelyik irányba a x-normálisú lapon a τ jellegű feszültség hat. Ehhez

[7]Ha két főfeszültség egyenlő akkor mindhárom félkör egybeesik és csak egy félkörünk lesz. Ha pedig mindhárom főfeszültség azonos akkor az összes kör egy ponttá zsugorodik össze.

[8]Az itt szereplő képletek nem általánosak, a jelen példához igazodnak. Mások a mennyiségek ha más pontokat vizsgálunk!



8. ábra. A főirányok helyzete

célszerű a kiskockát felrajzolnunk az eredetileg ismert főfeszültség irányából (jelen esetben z-irány) ránézve. Az így kapott nézetet szemlélteti a 8. ábra. Mivel az x lapon a τ_{xy} feszültség a negatív y irányba mutat, emiatt a keresett 1-es irányt megkapjuk, ha ebbe az irányba forgatjuk el az x-tengelyt. Ezt szemlélteti a 8. ábra.

Mivel az 1, 2 és 3 irányok jobbsodrású rendszert kell alkossanak, emiatt a 2-es főirány a 8. ábrán bejelölt irányba mutat.

A főirányokhoz tartozó egységvektorok az ábra jelöléseivel:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,447 \\ 0,894 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$