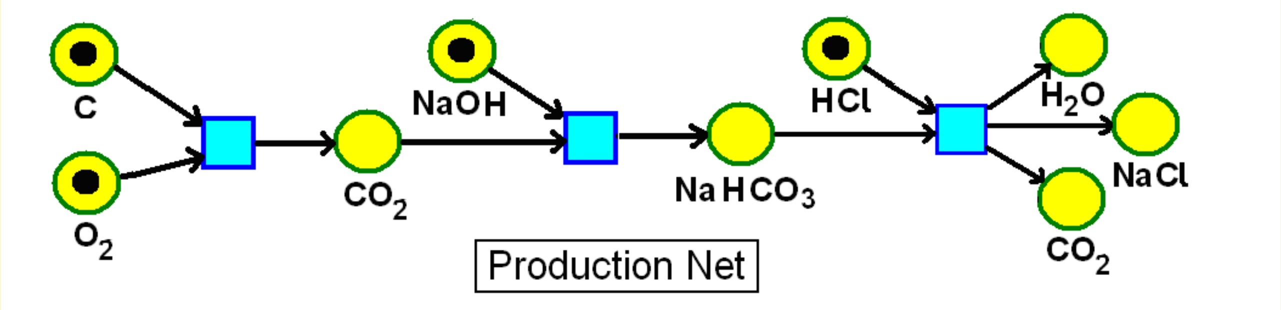
Petri hálók: alapfogalmak, kiterjesztések

dr. Bartha Tamás
BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

Dr. Pataricza András
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Petri háló: Mi az?

- A Petri hálók „eredete”
  - Carl Adam Petri: német matematikus, 1926–
  - a jelölésrendszert 1939-ben, 13 évesen találta ki
  - eredetileg kémiai folyamatok leírására szánta



  - a matematikai alapokat a doktori disszertációjában dolgozta ki 1962-ben (két hét alatt)
    - C. A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn Nr. 2, 1962

Petri háló: Mire használható?

Petri hálók alkalmazási köre

- konkurrens,
- aszinkron,
- elosztott,
- párhuzamos,
- nemdeterminisztikus
- sztochasztikus

és/vagy

rendszerek modellezése.

- Vannak más formalizmusok, pl. állapotgépek (automaták). Akkor minek egy másik?
  - Kompakt módon fejezi ki az állapotot
  - Szemléletesen fejezi ki a szinkronizációt

$\Rightarrow$ Tömörebb, átláthatóbb modellek

A Petri hálók alapvető tulajdonságai

- Egyidejűleg:
  - grafikus → áttekinthetőség (+hierarchia)
  - matematikai reprezentáció → precizitás, egyértelműség
- Struktúrával fejezi ki:
  - vezérlési struktúra
  - adatstruktúra
- Előnyök/hátrányok:
  - \+ más ábrázolásmódok is kiteríthetőek Petri hálóvá
  - – egyszerű feladathoz is nagy Petri háló tartozhat
    - → pl. megoldó módszer automatikusan generált modellekhez

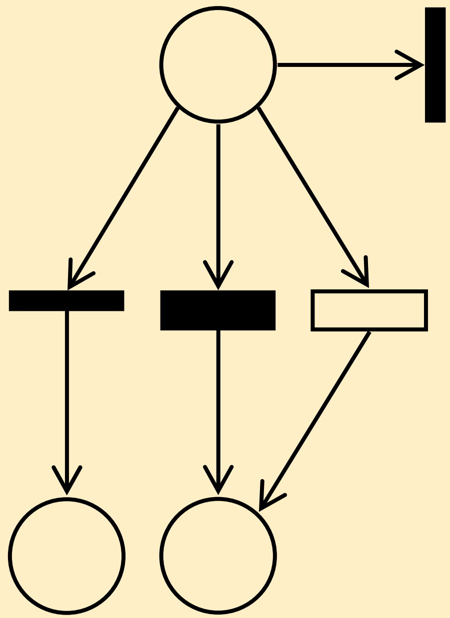
Petri hálók felépítése, működése

Petri hálók struktúrája

Strukturálisan: irányított, súlyozott, páros gráf

- Két típusú csomópont:
  - hely: $p \in P$ jelölése: kör
  - tranzíció: $t \in T$ jelölése: téglalap
- Irányított élek:
  - hely $\rightarrow$ tranzíció
  - tranzíció $\rightarrow$ hely

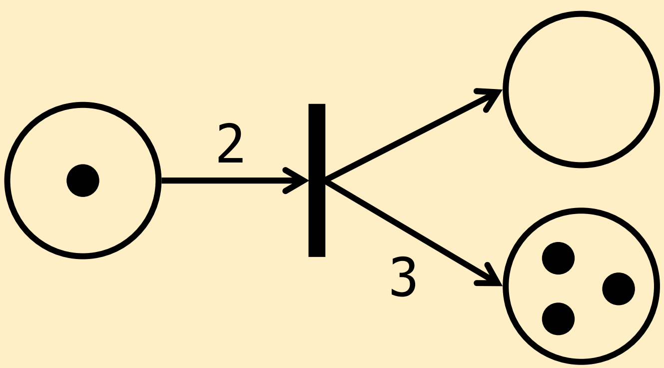
  páros gráf!
  - $e \in E : (P \times T) \cup (T \times P)$



Állapotváltozók

Állapot:

- Állapotjelölő: token
  - token jelölése: fekete pötty a hely körébe rajzolva
- Hely állapota: benne levő tokenek száma
- Hálózat állapota: az egyes helyek állapotainak összessége
  - Állapotvektor: a $\pi = |P|$ komponensű M token eloszlás vektor
  - Az m_i komponense a p_i helyen található tokenek száma
    - „p_i–t m_i token jelöli”



Dinamikus működés

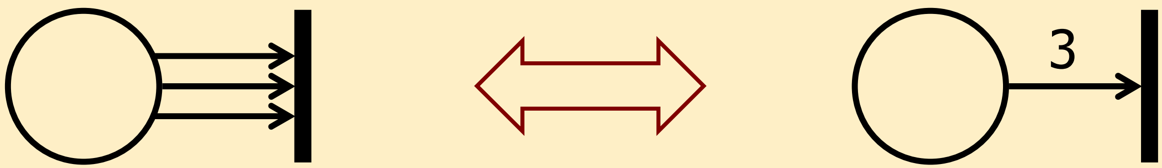
Állapotváltás:

- Állapot megváltozása: tranzíciók „tüzelése”
  - engedélyezettség vizsgálata
  - tüzelés végrehajtása
    - tokenek elvétele a bemeneti helyekről
    - tokenek kirakása a kimeneti helyekre
  - megváltozott token eloszlás vektor: új állapot
- Engedélyezettség: feltételek teljesülnek-e?
  - feltétel: bemeneti helyek / tokenek / bemenő élek
    - bemeneti helyeken van-e elég token?
    - minden egyszeres él egy tokent „szállít”

Többszörös élek

Élsúly:

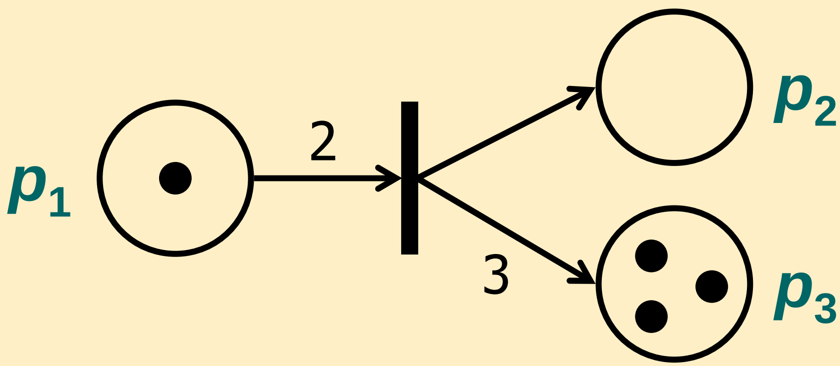
- Bármely $e \in E$ élhez $w^*(e) \in \mathbf{N}^+$ súlyt lehet rendelni
- A $w^*(e)$ súlyú e él ugyanaz, mint w_e darab párhuzamos él
- Nem rajzolunk párhuzamos éleket, élsúlyt használunk
- Nem szokás feltüntetni az egyszeres súlyokat



Állapotvektor: token eloszlás vektor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\pi \end{bmatrix}$$

- Kezdőállapot: M_0 kezdő token elosztás
- Példa:



$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{array}$$

Alapfogalmak összefoglalása

Petri háló:

- Nemdeterminisztikus véges automata
- Állapotvektor: token eloszlás vektor
- Állapotátmeneti függvény: tranzíciók

Felépítés:

- egy-egy hely egy-egy logikai feltétel
- Petri háló struktúrája követi a feladat logikai dekompozícióját

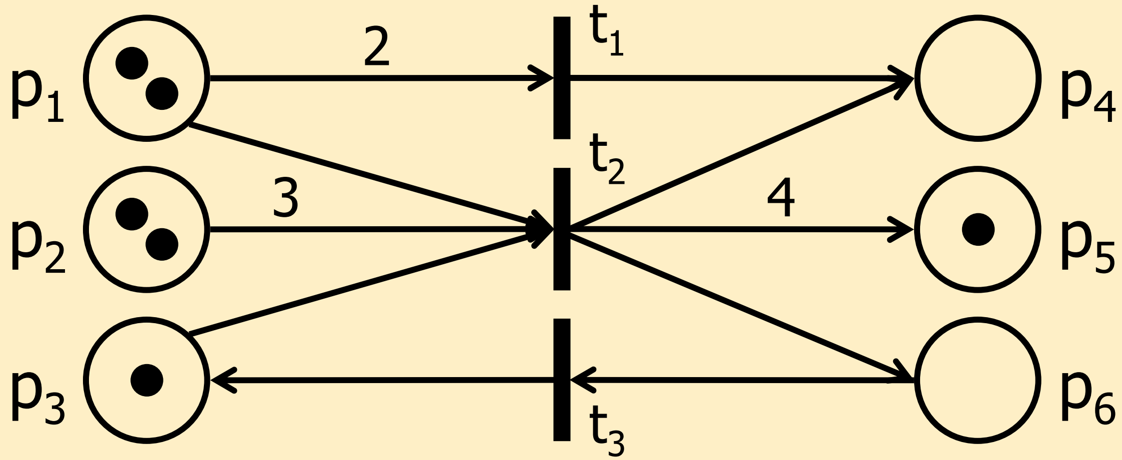
Topológia

- $n \in (P \cup T)$ csomópont $\bullet n$ ősei és $n \bullet$ utódai:
  - $t \in T$ ősei a bemeneti helyei: $\bullet t = \{p \mid (p,t) \in E\}$
  - $t \in T$ utódai a kimeneti helyei: $t \bullet = \{p \mid (t,p) \in E\}$
  - $p \in P$ ősei a bemeneti tranzíciói: $\bullet p = \{t \mid (t,p) \in E\}$
  - $p \in P$ utódai a kimeneti tranzíciói: $p \bullet = \{t \mid (p,t) \in E\}$
- Csomópontok $P' \subseteq P$ és tranzíciók $T' \subseteq T$ részhalmazára:

$$\bullet P' = \bigcup_{p \in P'} \bullet p \qquad \bullet T' = \bigcup_{t \in T'} \bullet t$$

$$P' \bullet = \bigcup_{p \in P'} p \bullet \qquad T' \bullet = \bigcup_{t \in T'} t \bullet$$

Topológia példa



$\bullet p_1 = \emptyset$

$\bullet p_2 = \emptyset$

$\bullet p_3 = \{t_3\}$

$\bullet p_4 = \{t_1, t_2\}$

$\bullet p_5 = \{t_2\}$

$\bullet p_6 = \{t_2\}$

$p_1\bullet = \{t_1, t_2\}$

$p_2\bullet = \{t_2\}$

$p_3\bullet = \{t_2\}$

$p_4\bullet = \emptyset$

$p_5\bullet = \emptyset$

$p_6\bullet = \{t_3\}$

$\bullet t_1 = \{p_1\}$

$\bullet t_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$

$\bullet t_3 = \{p_6\}$

$t_1\bullet = \{p_4\}$

$t_2\bullet = \{p_4, p_5, p_6\}$

$t_3\bullet = \{p_3\}$

Felépítés összefoglalása

Petri háló (PN)	$PN = \langle P, T, E, W, M_0 \rangle$
• Helyek	$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
• Tranzíciók (tüzelések)	$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$
	$P \cap T = \varnothing$
• Élek	$E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
• Súlyfüggvény	$w^* : E \to \mathbf{N}^+$
PN struktúra	$N = \langle P, T, E, W \rangle$
• Kezdőállapot	$M_0 : P \to \mathbf{N}$
PN adott kezdőállapottal	$PN = \langle N, M_0 \rangle$

Dinamikus viselkedés: engedélyezettség, tüzelés, állapottrajektória

Dinamikus viselkedés

Petri hálók „működésének” egy lépése:

- Állapot megváltozása: tranzíciók „tüzelése”
  - korábbi állapot: kezdeti token eloszlás vektor
  - tüzelés végrehajtása
    1. engedélyezettség vizsgálata
    2. tokenek elvétele a bemeneti helyekről
    3. tokenek kirakása a kimeneti helyekre
  - új állapot: megváltozott token eloszlás vektor

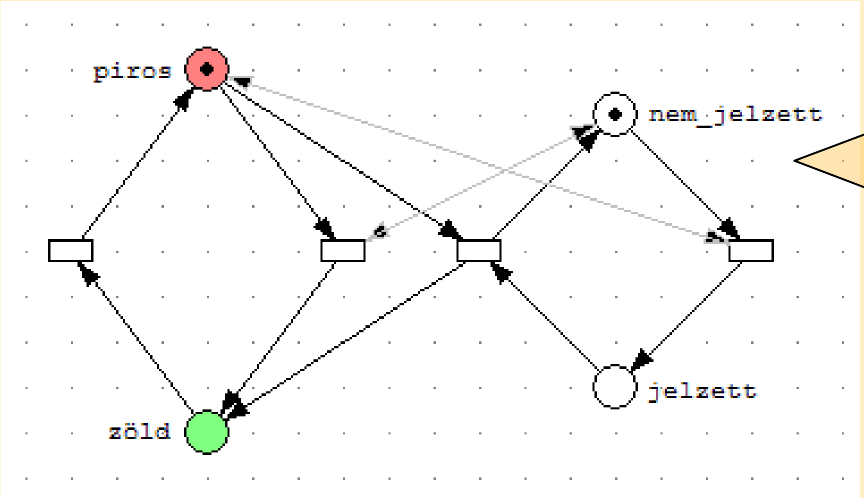
Engedélyezettség feltétele

- Ha egy $t \in T$ tranzíció minden bemeneti helyét legalább $w^-(p, t)$ token jelöli:
  - $w^-(p, t)$ a p-ből t-be vezető $e = (p, t)$ él $w^*(e)$ súlya

  $\Rightarrow$ a tranzíció tüzelése **engedélyezett**, ha

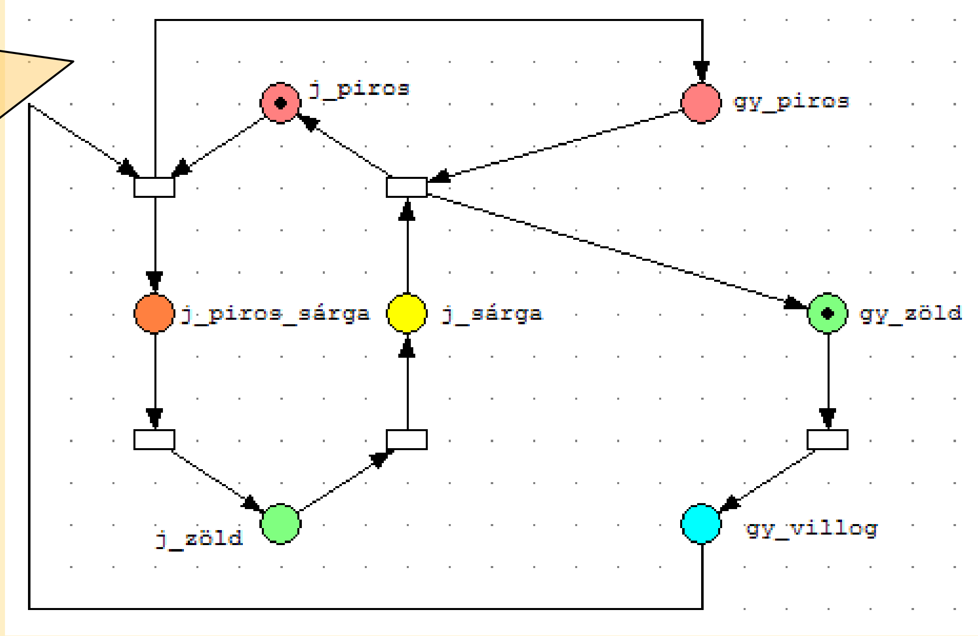
$$\boxed{\forall p \in \bullet t : m_p \geq w^-(p,t)}$$

Egyszerű modellek: szinkronizáció



- Gyalogos átkelőhely lámpával és nyomógombbal

- Kereszteződés forgalmi és gyalogos átkelőhely lámpával



Állapotátmenet

Tüzelés végrehajtása:

- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzel vagy nem
  - “fire at will”, de egyszerre csak egy tranzíció tüzelhet!
- Több tranzíció engedélyezett: konfliktus
  - engedélyezett tranzíciók közül ki kell választani egyet, aki tüzelhet
  - konfliktusfeloldás: véletlen választással

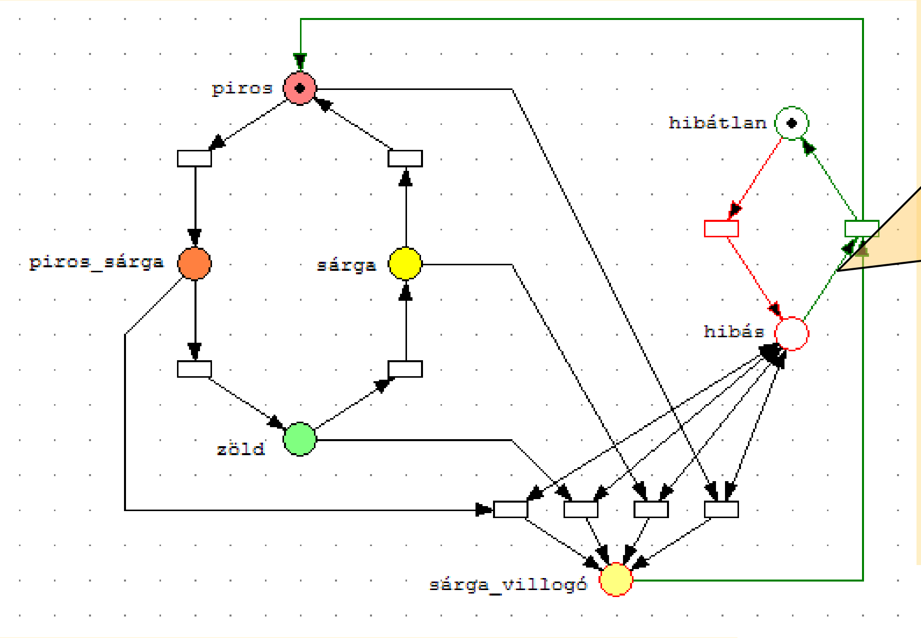
$\Rightarrow$ **Nemdeterminisztikus működés**

A tranzíció tüzelése:

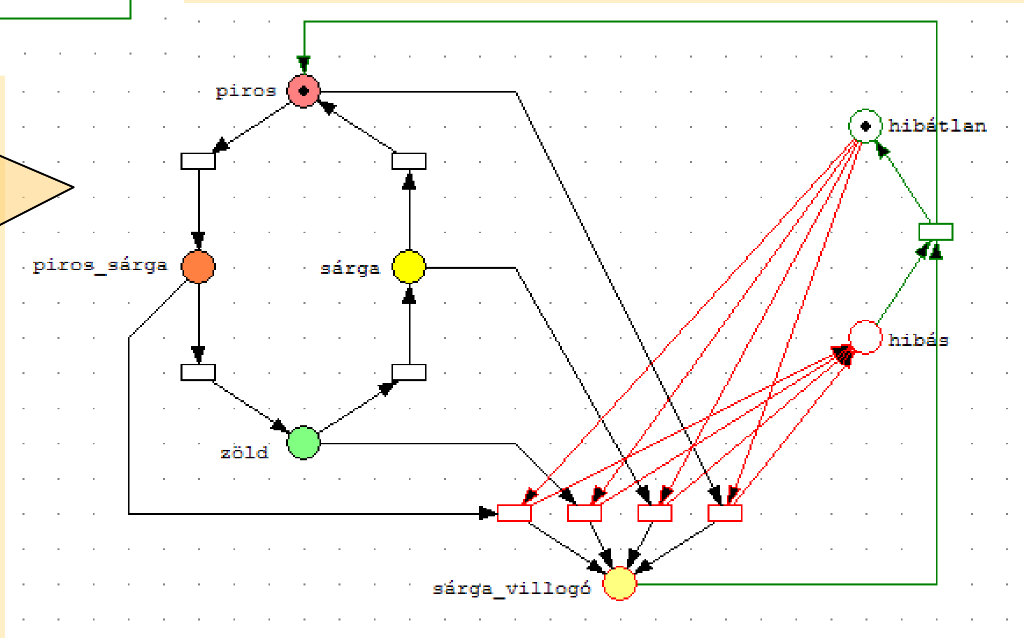
- elvesz $w^-(p, t)$ darab tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - $w^-(p, t)$ a $p \to t$ él súlya
- elhelyez $w^+(t, p)$ darab tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - $w^+(t, p)$ a $t \to p$ él súlya

Petri háló modellek készítése
Alapvető konstrukciók, egyszerű példák

Egyszerű modellek: szinkronizáció és állapotváltozó



- Kereszteződés forgalmi lámpával, meghibásodhat
- Állapotvezérelt

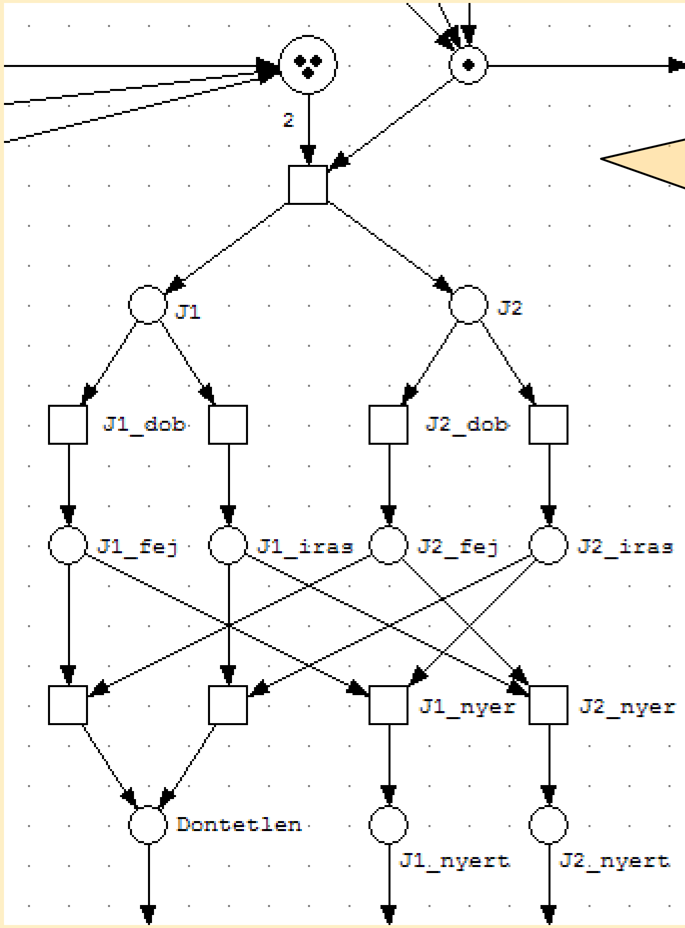


- Kereszteződés forgalmi lámpával, meghibásodhat
- Eseményvezérelt

Nemdeterminizmus és időzítés

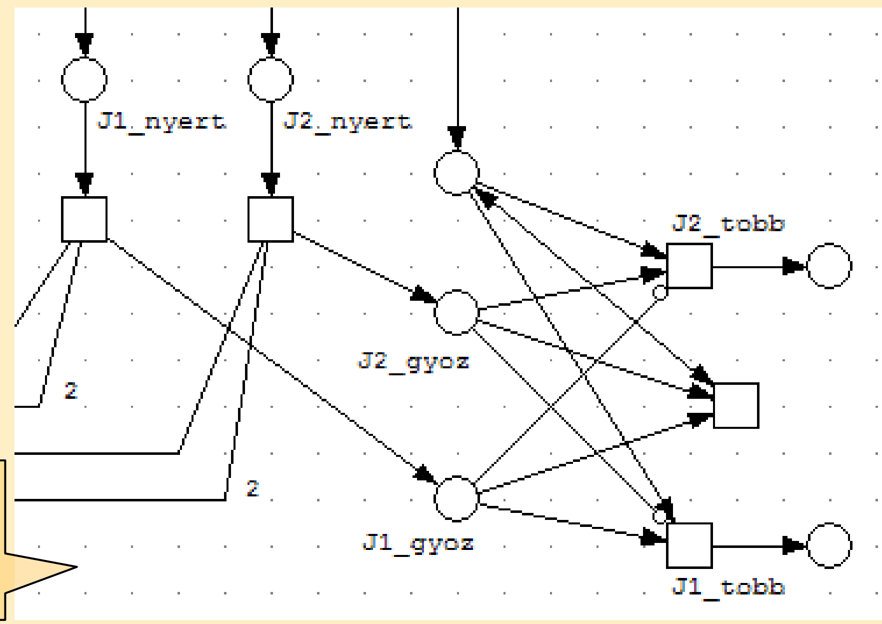
- Tetszés szerinti tüzelés jelentése:
  - implicit időfogalom
  - nincs időskála
  - a tüzelés a $[0, \infty)$ időintervallumban bárhol megtörténhet
- Tüzelésekhez tetszőleges konkrét időket rendelve:
  - Az azonos struktúrájú és kezdőállapotú nemdeterminisztikus időzítetlen Petri háló az időzített Petri hálónak minden lehetséges tüzelési szekvenciáját lefedi.

Egyszerű modellek: nemdeterminizmus



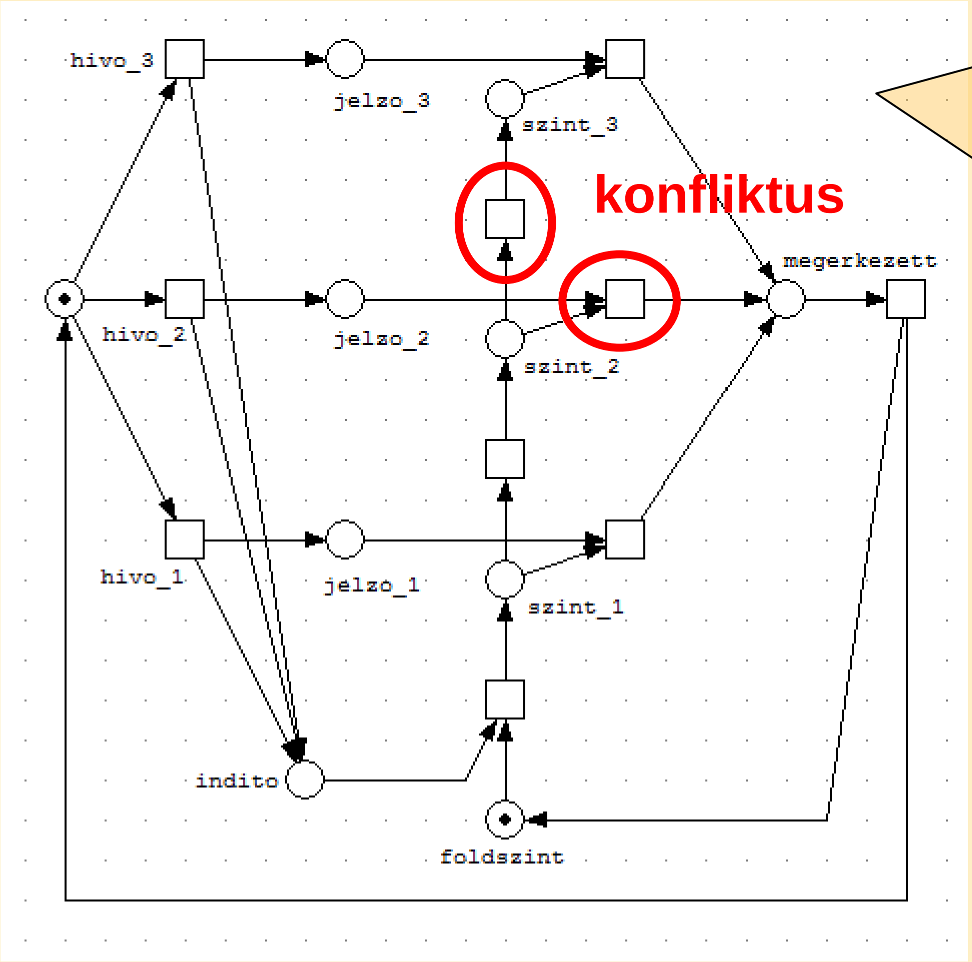
- Pénzfeldobós játék modellje. A fej nyer. Döntetlen is lehetséges.

nemdeterminizmus korlátozása

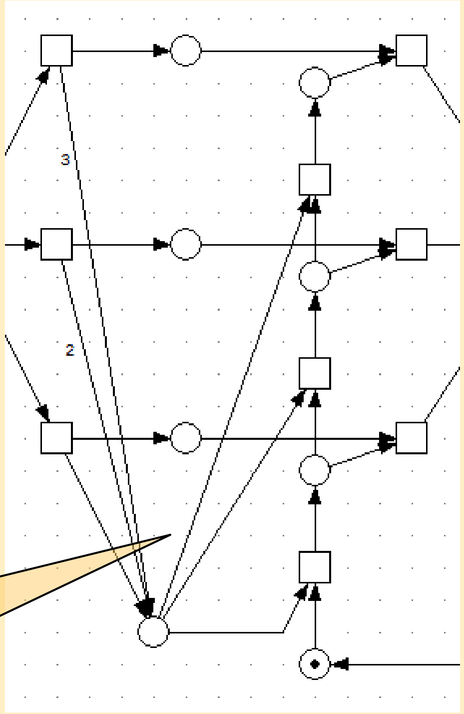


- Győztes kihirdetése

Egyszerű modellek: konfliktus



- Ételllift modellje. Három szintről hívhatják, az adott szinten megáll.
- A modell hibás.



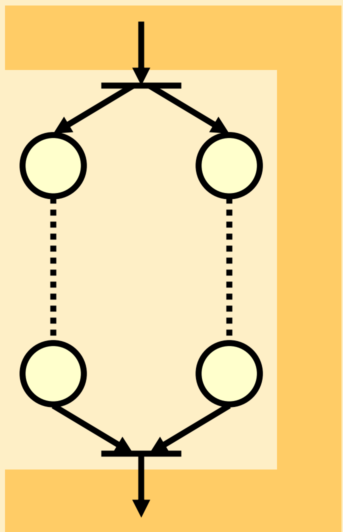
- A modell javítása

Speciális csomópontok

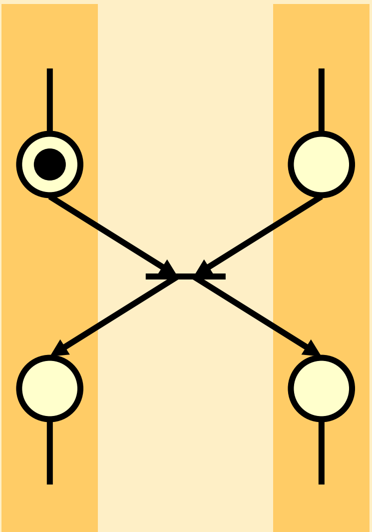
Forrás ill. nyelő csomópontok

- $t \in T$ forrás (nyelő) tranzíció:
  - Bemenő (kimenő) hely nélküli ($\bullet t = \emptyset$ illetve $t \bullet = \emptyset$)
  - Forrás tranzíció minden esetben tud tüzelni
- PN **tiszta**, ha nincsenek önhurkai, azaz
  - $\forall t \in T: \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$

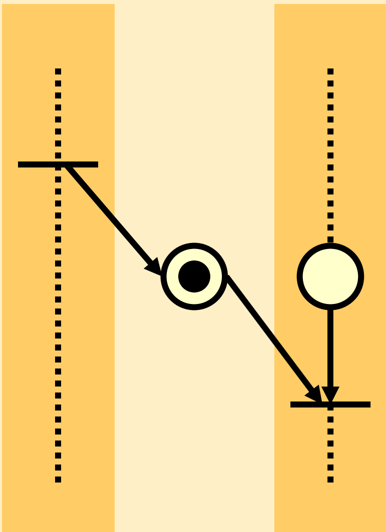
Tipikus modellkonstrukciók



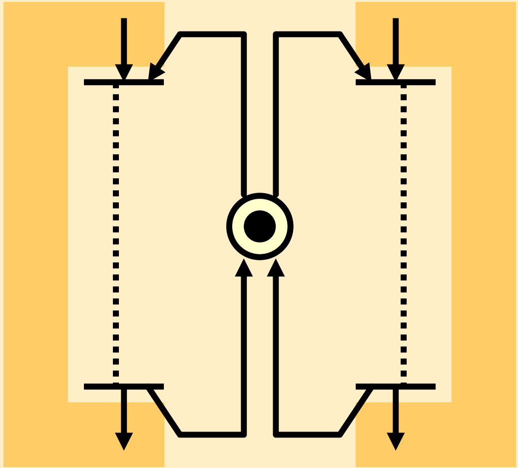
Fork-Join



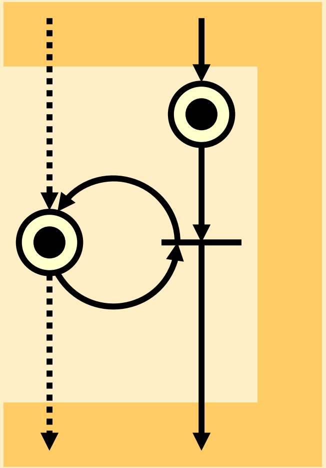
Randevú szinkronizálás



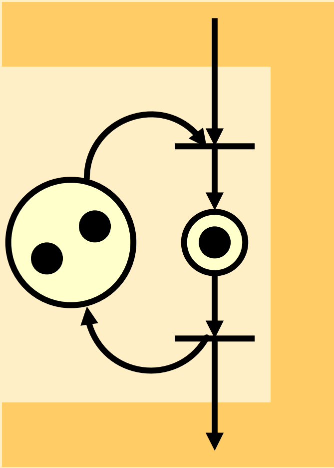
Szemafor szinkronizálás



Kölcsönös kizárás

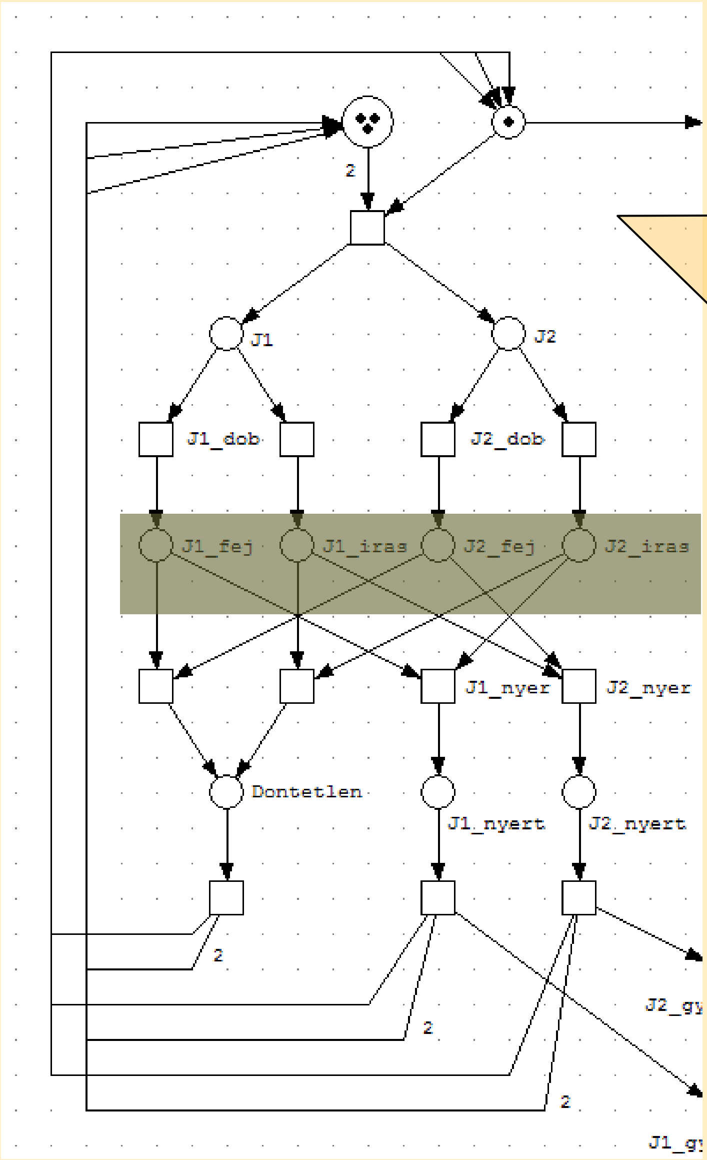


Állapotváltozó leolvasása

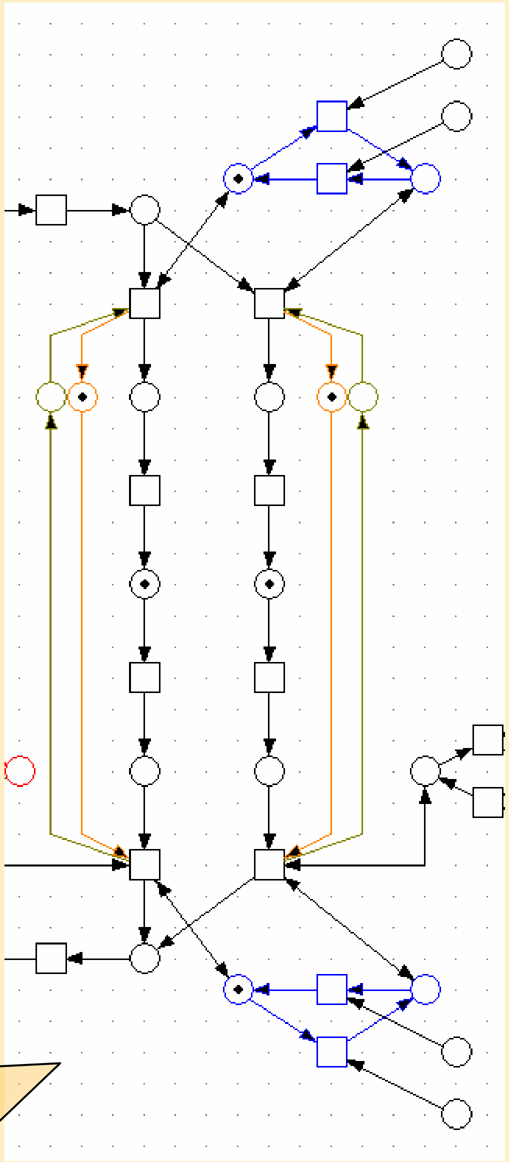


Korlátos kapacitás

Egyszerű modellek: kölcsönös kizárás



- Pénzfeldobós játék: egyszerre csak ketten játszatnak



- Modellvasút szakasz érzékelő

Petri hálók működésének leírása
Tüzelési szekvencia, állapotegyenlet

Az állapotváltozás nagysága

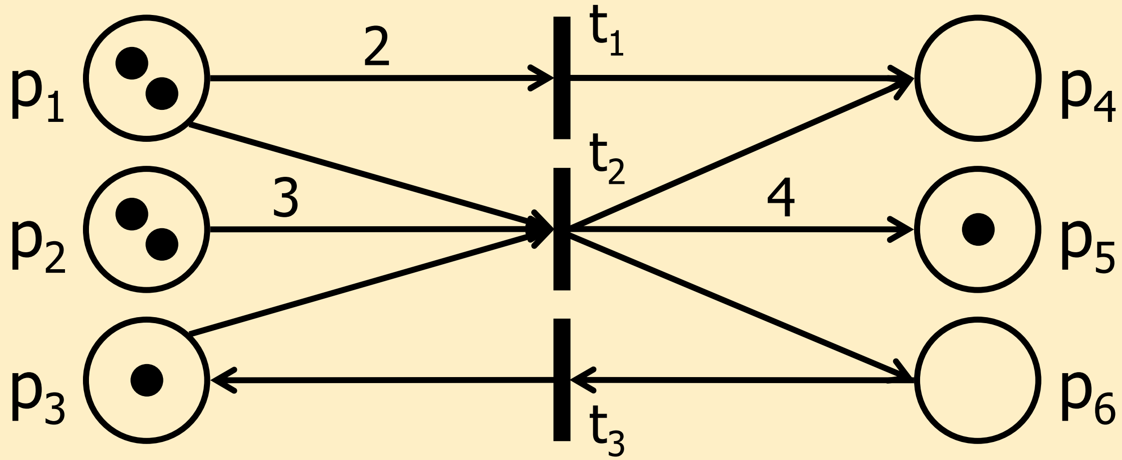
A tranzíció tüzelése:

- elvesz $w^-(p, t)$ tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - $w^-(p, t)$ a $p \rightarrow t$ él súlya
- kitesz $w^+(t, p)$ tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - $w^+(t, p)$ a $t \rightarrow p$ él súlya

Ha t tüzel M állapotban

- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot e_t$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor

Szomszédossági mátrix példa



$$W = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W^- = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Szomszédossági mátrix

- Súlyozott szomszédossági mátrix: $\mathbf{W} = [\mathrm{w}(t, p)]$
- Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
- Ha t tüzel, mennyit változik a p-beli tokenszám:

$$\mathrm{w}(t, p) = \begin{cases} \mathrm{w}^{+}(t, p) - \mathrm{w}^{-}(p, t) & \text{ha } (t, p) \in E \text{ vagy } (p, t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t, p) \notin E \text{ és } (p, t) \notin E \end{cases}$$

Az állapotváltozás nagysága

Ha t tüzel M állapotban

- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^{T} \cdot e_t$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
- Ahol **W** a súlyozott szomszédossági mátrix
  - $\mathbf{W} = [\mathrm{w}(t, p)]$
  - Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
  - Ha t tüzel, mennyit változik a p-beli tokenszám:

$$\mathrm{w}(t, p) = \begin{cases} \mathrm{w}^{+}(t, p) - \mathrm{w}^{-}(p, t) & \text{ha } (t, p) \in E \text{ vagy } (p, t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t, p) \notin E \text{ és } (p, t) \notin E \end{cases}$$

Tüzelési szekvencia

- Állapotátmeneti trajektória
  - egymást követő tüzelések hatására felvett állapotok
- Tüzelési szekvencia

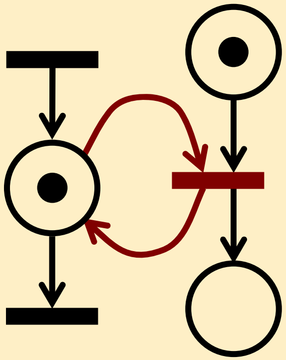
$$\underline{\sigma} = \langle M_{i0}\, t_{i1}\, M_{i1} \ldots t_{in}\, M_{in} \rangle \rightarrow \langle t_{i1} \ldots t_{in} \rangle$$

- Ha az összes tranzíció kielégíti a tüzelési szabályt:
  - M_{in} állapot M_{i0}-ból elérhető a $\underline{\sigma}$ tüzelési szekvencia által:

$$M_{i0}\, [\underline{\sigma} > M_{in}$$

Állapotegyenlet

- Petri háló dinamikája: tokenek áramlanak
  - Kirchhoff egyenletekhez hasonló egyensúlyi egyenletek
- Előfeltétel (egyértelműség): tiszta Petri háló
  - Nincs olyan átmenet, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő átmenete: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \varnothing$
  - Hurokél
    - a tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik, de
    - a tüzelési feltételben szerepet játszik



Állapotegyenlet

- Tüzelési szekvencia: $M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n}\right.$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \left\langle M_{i_0} t_{i_1} M_{i_1} \dots t_{i_n} M_{i_n} \right\rangle = \left\langle t_{i_1} \dots t_{i_n} \right\rangle}$$

- **Engedélyezés:**
  - $t_{i,j}$ átmenet minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyén **elég** token

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \bullet t_{i_j} : M_{i_{j-1}}(p) \geq w^{-}(p, t_{i_j}) = \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j}}$$

Állapottrajektóriák

- **Állapotátmenet:**
  - $t_{i,j}$ átmenet engedélyezett $\rightarrow$ tüzel
    - minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyéről $w^-(p, t_{i,j})$ tokent vesz el
    - minden $p \in t_{i,j}\bullet$ kimenő helyére $w^+(p, t_{i,j})$ tokent tesz ki

$$\boxed{M_{i_j} = M_{i_{j-1}} - \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j} + \mathbf{W}^{+^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j} = M_{i_{j-1}} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j}}$$

    - összeadva és átrendezve:

$$\boxed{M_{i_0} [\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T}$$

- Tüzelési szám vektor: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában

Állapotegyenlet levezetése

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}}$$

$$\ldots$$

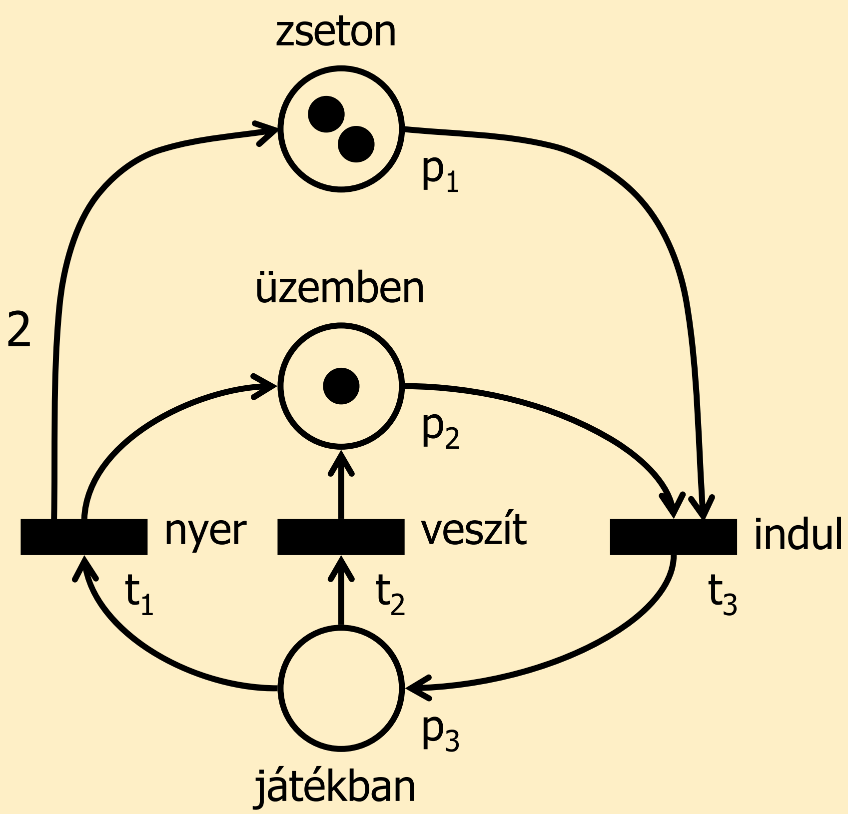
$$M_{n+1} = M_n + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_{n+1}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_{n+1}}$$

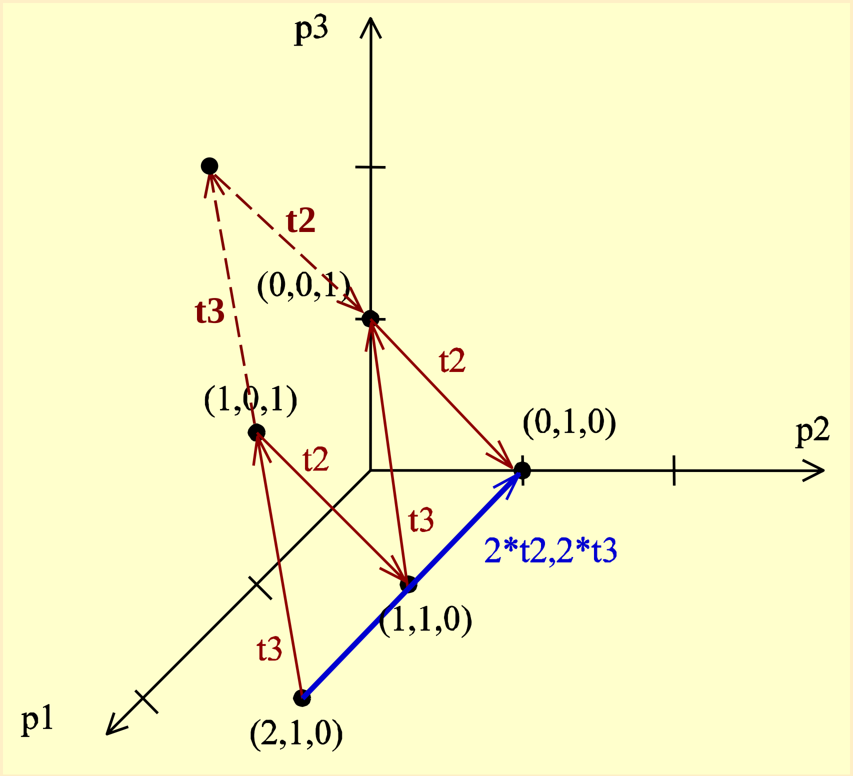
$$\ldots$$

$$M_m = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_m}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{m} \vec{e}_{t_i}$$

$$M_m = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \Rightarrow \boxed{M_m - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T}$$

Állapotegyenlet és elérhetőség





- A **tüzelési szám vektor**ban kevesebb az információ, mint a **tüzelési szekvenciá**ban!

Kiterjesztett Petri hálók
A tüzelési szemantika módosítása

A tüzelési szemantika módosítása

- Cél: Petri hálók működési nemdeterminizmusának korlátozása
  - Prioritás rendelése a tranzíciókhoz
  - Kapacitás rendelése a helyekhez
  - Tiltó élek bevezetése

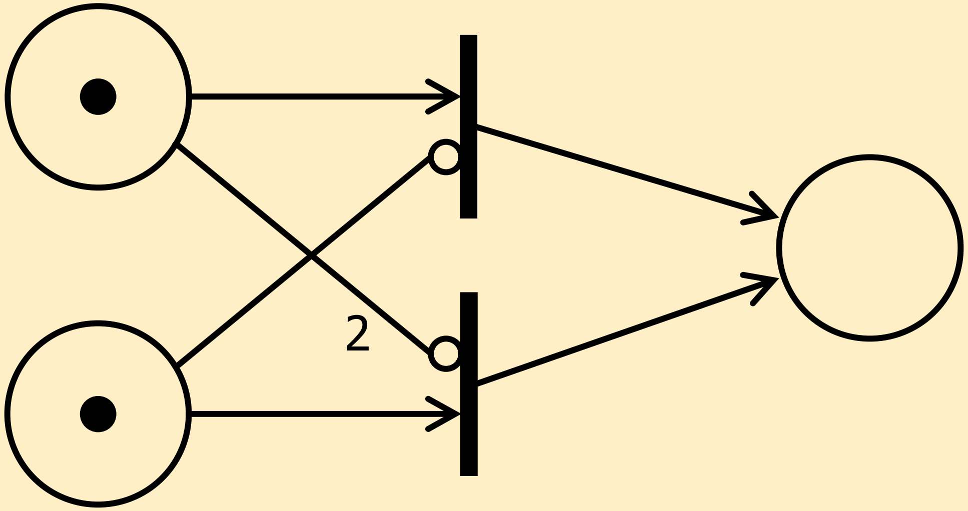
Tiltás

- Klasszikus PN:
  - ponált tüzelési feltételek
  - a bemenő helyeken a feltételek megléte?
- Tiltás:
  - egyes feltételek bekövetkeztekor a működés ne hajtódjék végre
  - tiltó él
  - (őrfeltétel: tranzíciókhoz kapcsolt logikai feltétel)

Tiltó él

- Tüzelési szabály kiegészítése:

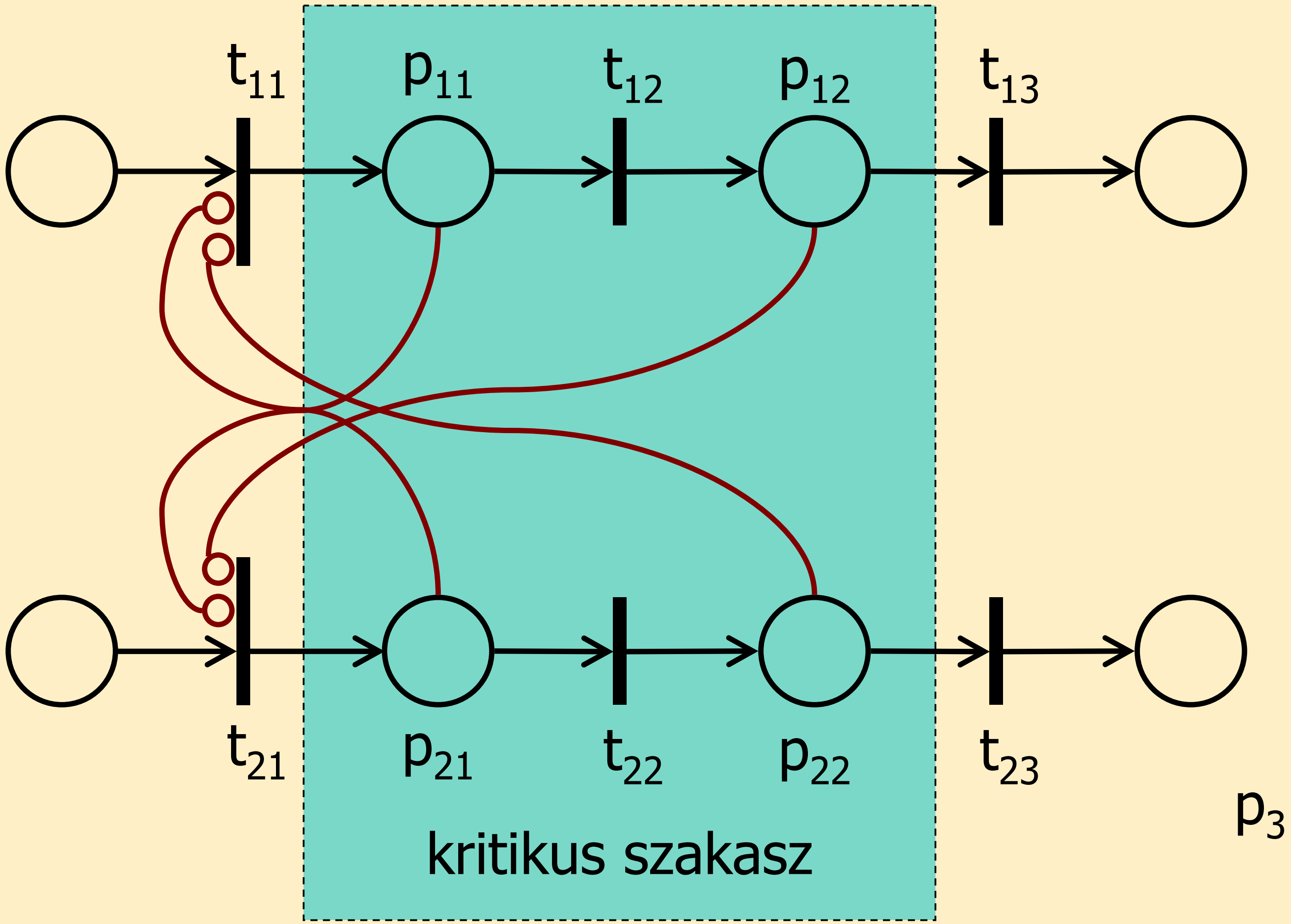
  ha a t tranzícióhoz kapcsolódó bármely (p,t) tiltó él p bemenő helyén a $w^-(p,t)$ élsúlynál nagyobb vagy egyenlő számú token van $\Rightarrow$ a tüzelés nem hajtható végre



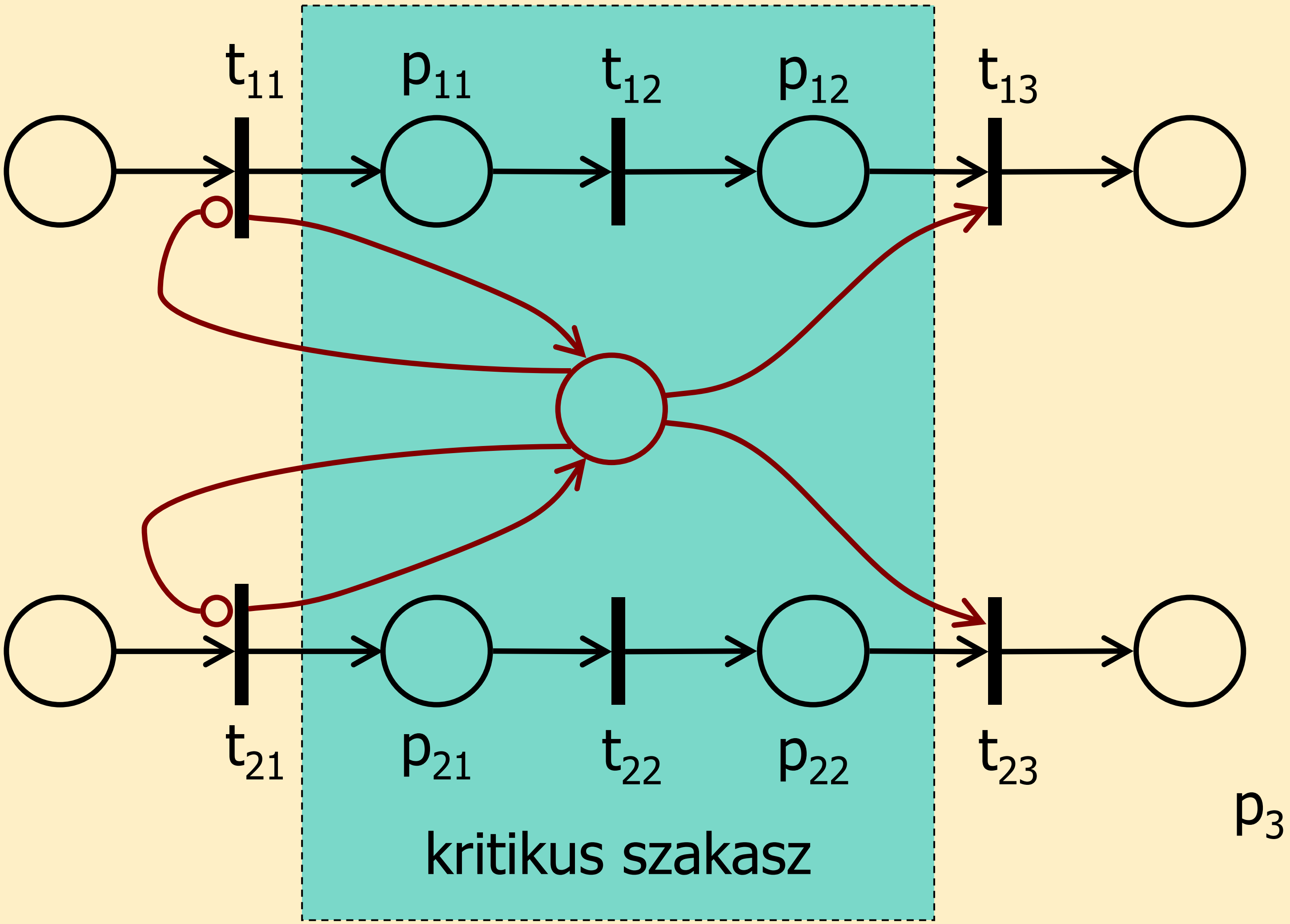
Tiltó élek használata

- Előny: a tiltó élek bevezetésével a Petri hálók a Turing gépekkel azonos kifejezőerőt nyernek
- Hátrány: számos analízis módszer tiltó éleket tartalmazó Petri hálókra nem alkalmazható

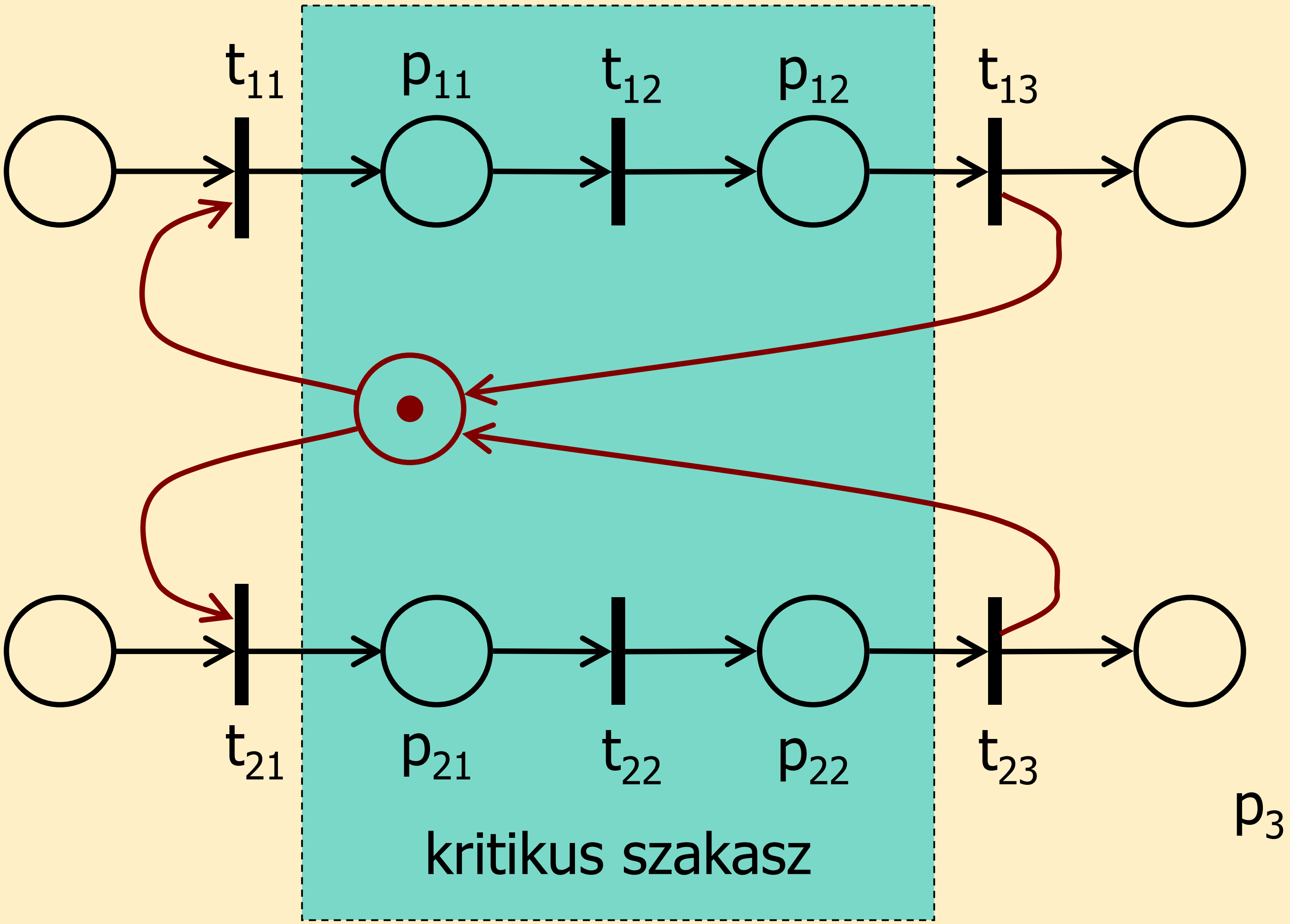
Példa tiltó él alkalmazására: kölcsönös kizárás



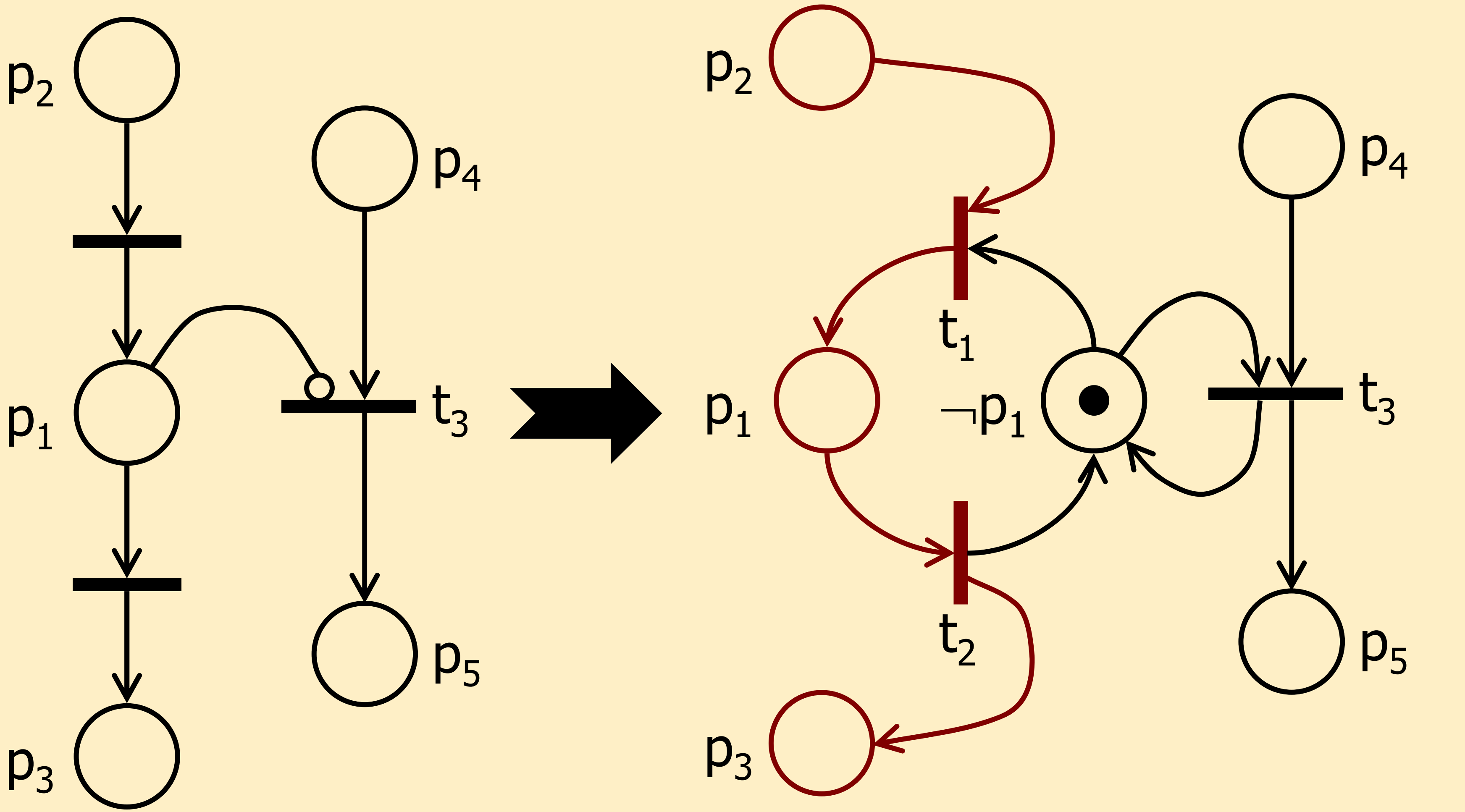
Lehet ezt elegánsabban is:



A legegyszerűbb azonban:



Tiltó él kiváltása egyszerű esetben



Prioritás

- Tranzíciókhoz rendelt prioritás
- Az engedélyezett tranzíciók közül egy alacsonyabb prioritású mindaddig nem tüzelhet, amíg van
  - engedélyezett ÉS
  - magasabb prioritású tranzíció
- Prioritási szinten belül továbbra is nemdeterminisztikus választás!

Petri hálók bővített formális definíciója

Petri háló (PN)	$PN = \langle P, T, E, W, M_0 \rangle$
• Helyek	$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
• Tranzíciók (tüzelések)	$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$
	$P \cap T = \emptyset$
• Prioritás	$\Pi : T \rightarrow \mathbf{N}$
• Élek	$E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
• Súlyfüggvény	$\mathrm{w}^* : E \rightarrow \mathbf{N}^+$
PN struktúra	$N = \langle P, T, E, W \rangle$
• Kezdőállapot	$M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$
PN adott kezdőállapottal	$PN = \langle N, M_0 \rangle$

Helyek kapacitáskorlátja

- Idáig: végtelen kapacitású helyek
  - az állapotvektor komponensei tetszőleges nemnegatív egészek
  - véges erőforráskészlet természetes megjelenítése?
- Véges kapacitású Petri-háló
  - minden egyes p helyhez opcionálisan $K(p)$ kapacitás
  - az adott helyre betölthető tokenek maximális száma
- Tüzelési szabály kiegészül:

  a tranzíció egyetlen kimenő p helyre sem tölthet a hely $K(p)$ kapacitásánál több tokent

Tüzelés véges kapacitású Petri hálóban

- Egy $t \in T$ tranzíció tüzelése akkor engedélyezett, ha elegendő token van a bemeneti helyeken:

$$\forall\, p \in \bullet t : \mathrm{m}_p \geq \mathrm{w}^-(p, t)$$

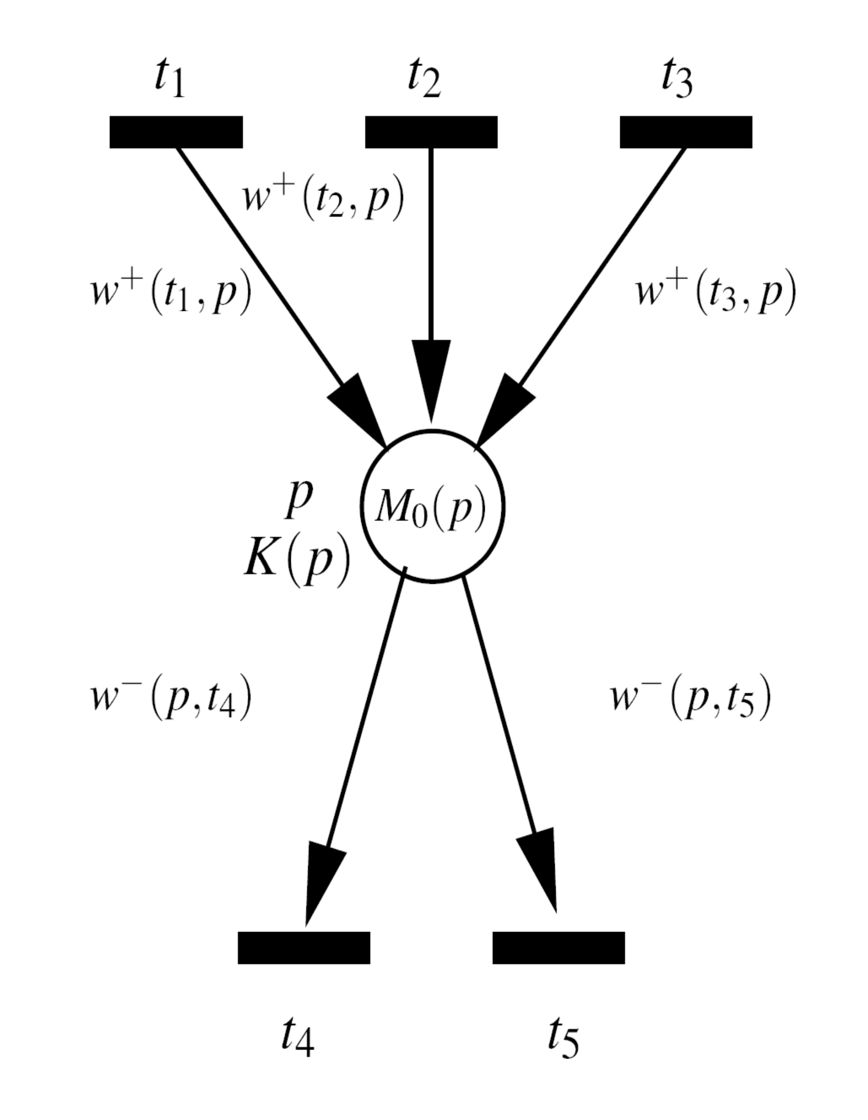
- Kapacitáskorlát ($M\,[t > \mathrm{M}'$ tüzelés után):

$$\forall\, p \in t\bullet : \mathrm{m'}_p = \mathrm{m}_p + \mathrm{w}^+(t, p) \leq K(p)$$

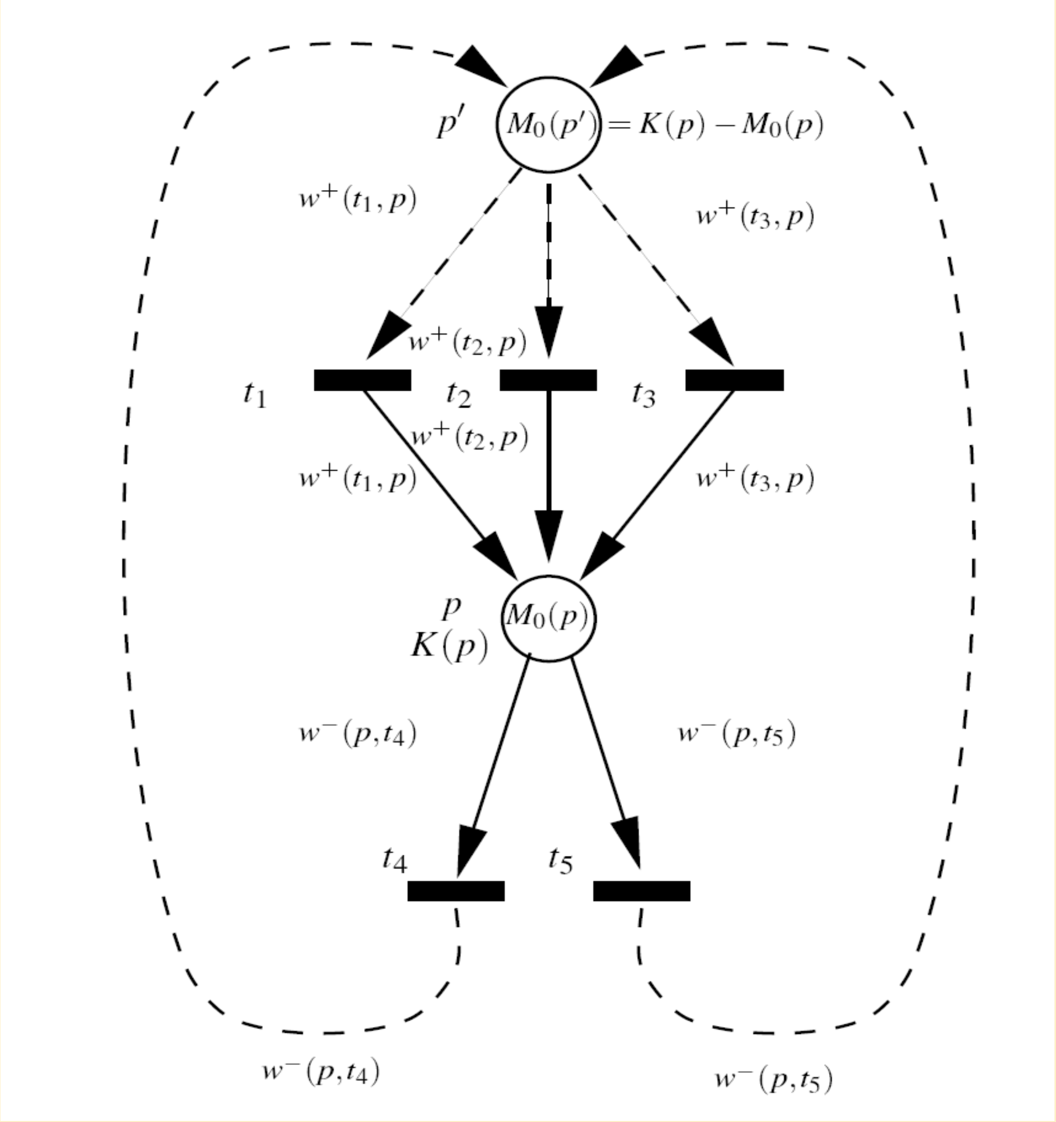
- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzelhet
- A tüzelés után:

$$\forall\, p \in P : \mathrm{m'}_p = \mathrm{m}_p + \mathrm{w}^+(t, p) - \mathrm{w}^-(p, t)$$

Korlátos kapacitású hely



Ekvivalens végtelen kapacitású háló



Kiegészítő helytranszformáció

Tiszta Petri hálók esetén a transzformáció menete:

- Minden egyes korlátos véges kapacitású p helyhez
  - rendeljünk hozzá egy járulékos p' adminisztrációs helyet
  - a p' adminisztrációs hely kezdőállapota

$$M_0(p') = K(p) - M_0(p)$$

azaz a p hely még kihasználatlan kapacitása.

Kiegészítő helytranszformáció

- A p' hely és a $t \in \bullet p \cup p \bullet$ tranzíciók között kiegészítő éleket húzunk be
- Az élek iránya attól függ, hogy t tüzelése növeli vagy csökkenti-e a p helyen levő tokenek számát:
  - A t tranzíció és p' hely között (t, p') élet húzunk be $|w(t, p)|$ súllyal, ha $w(t, p) < 0$, azaz a tüzelés elvesz tokent a p helyről
  - A p' hely és a t tranzíció között (p', t) élet húzunk be $w(t, p)$ súllyal, ha $w(t, p) > 0$, azaz a tüzelés berak tokent a p helyre

A transzformált háló ekvivalenciája

- Belátható, hogy a kiegészítő helytranszformáció az alábbi tulajdonsággal rendelkezik:
  - Ha (N, M_0) egy tiszta, véges kapacitású Petri háló, alkalmazzuk rá a szigorú tüzelési szabályt.
  - Ha (N', M'_0) a fenti transzformáció által létrehozott társhálója ennek a Petri hálónak, amelyben a gyenge tüzelési szabályt alkalmazzuk, akkor a két háló tüzelési szekvenciái azonosak.

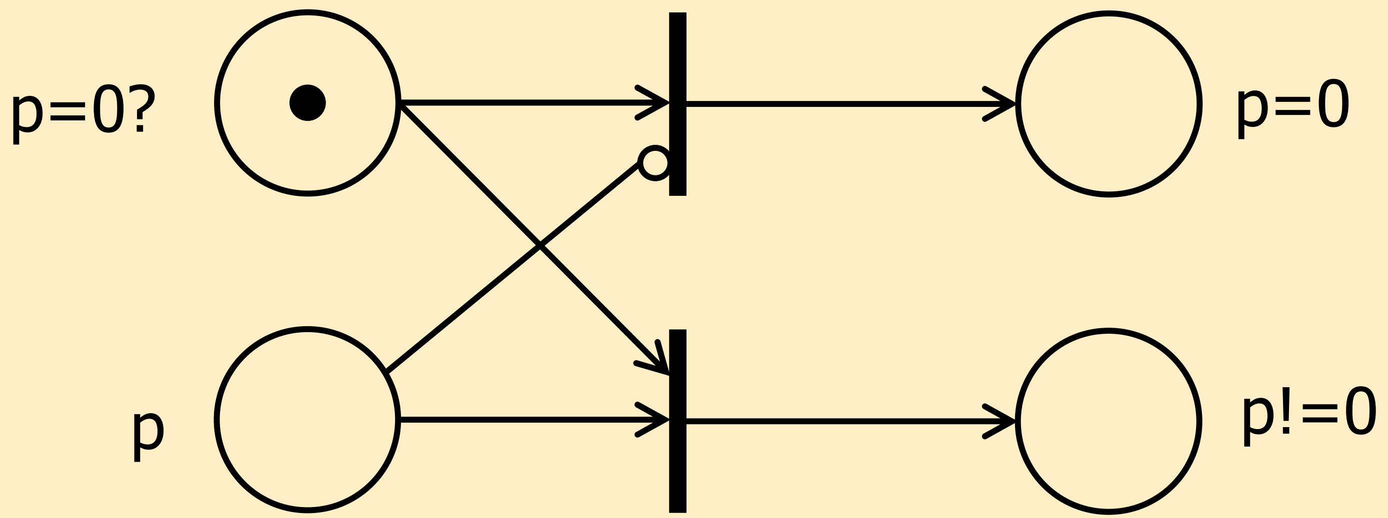
Kiterjesztett és közönséges Petri hálók kifejezőereje

Kiterjesztés nélküli PN kifejező ereje

- Vannak olyan rendszerek, amelyek nem modellezhetőek PN-el, ha egyik kiterjesztést sem használhatjuk?
  - IGEN
- A „nem modellezhetőség” kulcsa:
  - Nem korlátos kapacitású hely esetén nem tesztelhető, hogy a helyen adott *k* számú token van-e vagy sem
  - Speciális esetként *k=0*, ami „zero testing” probléma néven ismert
    - Belátható, hogy egy megoldás a „zero testing” problémára megoldást ad az általános *k*-val paraméterezett esetre

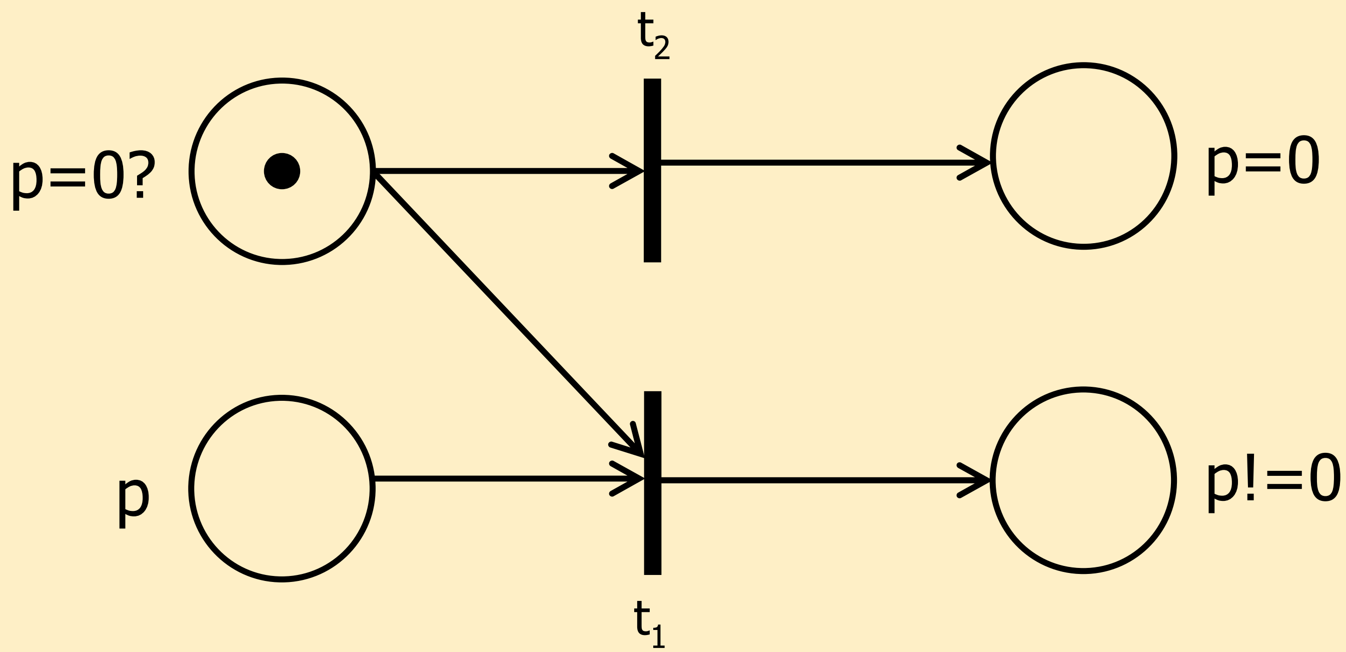
Kiterjesztések és kifejező erő

- Kapacitás korlát csak „szintaktikai édesítőszer”
- Tiltó él képes „zero testing”-re



Kiterjesztések és kifejező erő (folyt.)

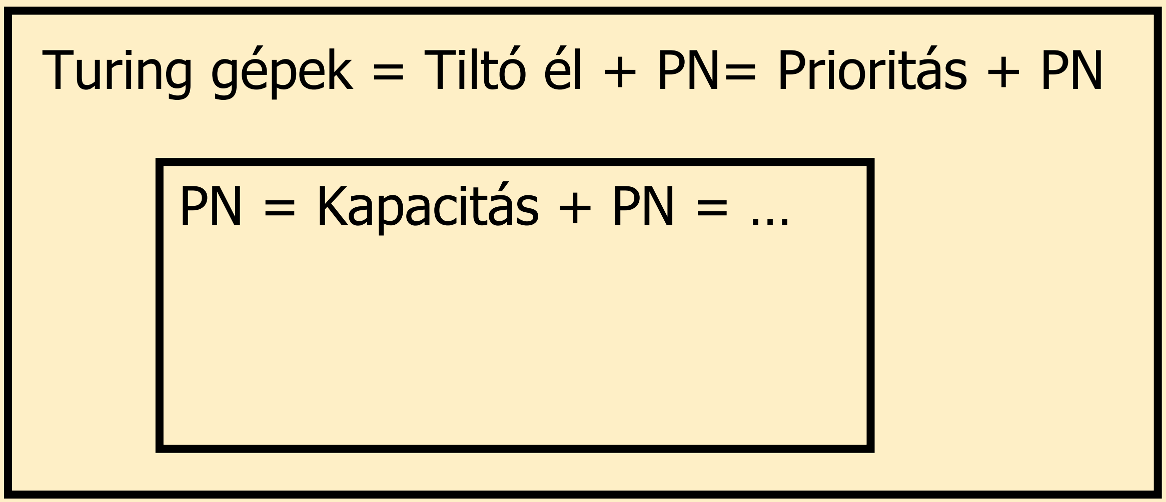
- Prioritás képes „zero testing”-re
- Bizonyítható: tiltó él helyettesíthető prioritással



$$\boxed{\pi_2 < \pi_1}$$

Kifejező erő összefoglalás[P81]

- Zero testing képesség lehetővé teszi, hogy minden Turing gép szimulálható PN-el
- (Következmény: eldönthetetlen problémák…)



[P81] J.L. Peterson, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, 1981.