

## **A légerők és nyomatékok keletkezése és jellemzése**

Dr. Bauer Péter  
BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék  
2015.

Ebben a segédletben röviden a repülőgép szárnyon keletkező légerőkkel, az ezekből eredő nyomatékokkal és a légerők és nyomatékok matematikai leírásával foglalkozunk.

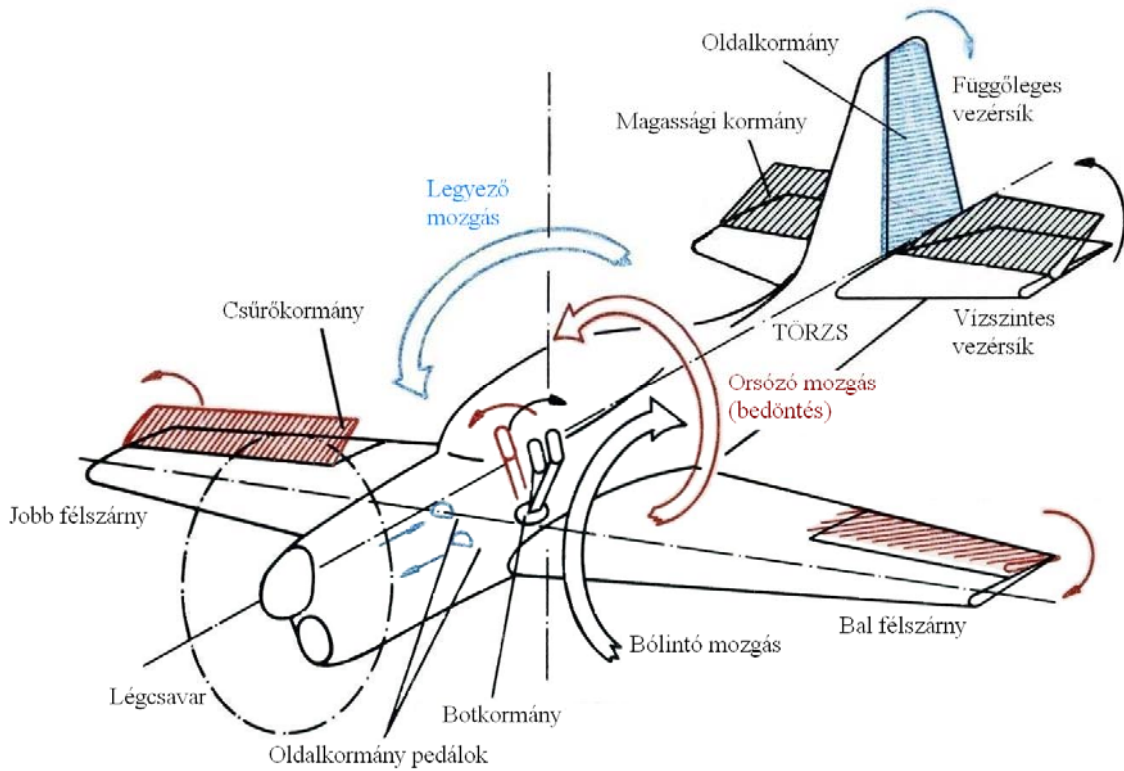
Elsőként tekintsük egy hagyományos felépítésű repülőgép kialakítását az alapvető kormánysszervekkel (1. ábra).

A repülőgép karosszériája (szaknyelven sárkányszerkezete) szárnyból, vízszintes és függőleges vezérsíkból és az ezeket összetartó törzsből áll. A szárny két felének neve bal- és jobb fűlszárny ahogy az ábra is mutatja. Az alapvető kormányfelületek a szárnyvégeken és a vezérsíkokon helyezkednek el. Ezek rendre:

1. Csűrőkormány, mely aszimmetrikus kitérítésű, ha egyik oldalon lefelé, akkor a másik oldalon felfelé tér ki, mint az ábra is mutatja. Kitérítését a pilóta a botkormány oldal irányú mozgásával végzi. A csűrőkormány a repülőgép bedöntését (orsózó mozgás) idézi elő.
2. A magassági kormány a vízszintes vezérsíkon található. Kitérítését a pilóta a botkormány hátrahúzásával, vagy előretolásával végzi. A magassági kormány a repülőgép bólintó mozgását (emelkedés, vagy süllyedés) idézi elő.
3. Oldalkormány, mely a függőleges vezérsíkon található. Kitérítését a pilóta az oldalkormány pedálokkal végzi. Az oldalkormány a repülőgép legyező mozgását (egyben jobbra / balra fordulását) idézi elő.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a repülőgép fordulását a legtöbb típusnál önmagában a csűrőkormánnyal elő lehet idézni. Azaz a csűrőkormány nem csak bedönti, de fordítja is a gépet. Az oldalkormányt a legtöbb esetben csak rásegítésként használják.

Természetesen számos az ábrán feltüntetettől eltérő repülőgép sárkány konstrukció is létezik a valóságban. A repülőgép alapvető szerkezetének és fő kormánysszerveinek áttekintését követően rátérünk arra, hogy tulajdonképpen hogyan is repül a repülőgép. Ehhez először egy kicsit a szárnyak és vezérsíkok geometriájával kell foglalkozni.



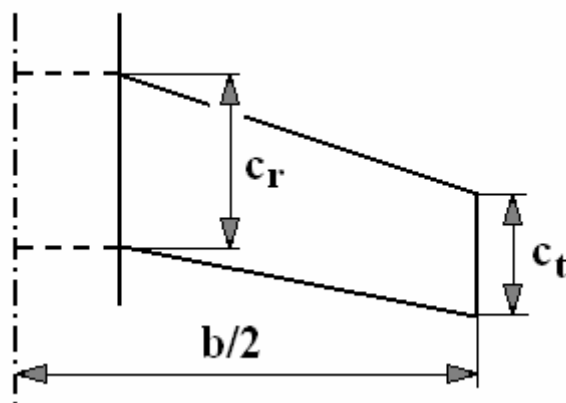
1. ábra Repülőgép sarkány fő részei és fő kormány szervei (eredeti kép forrása: <http://digivideofestmenyek.com/>)

A 2. ábra egy repülőgép félszárny sematikus rajzát mutatja a főbb jelölések feltüntetésével.

$c_r$  a tő húr (root)

$c_t$  a vég húr (tip)

$b$  a fesztávolság

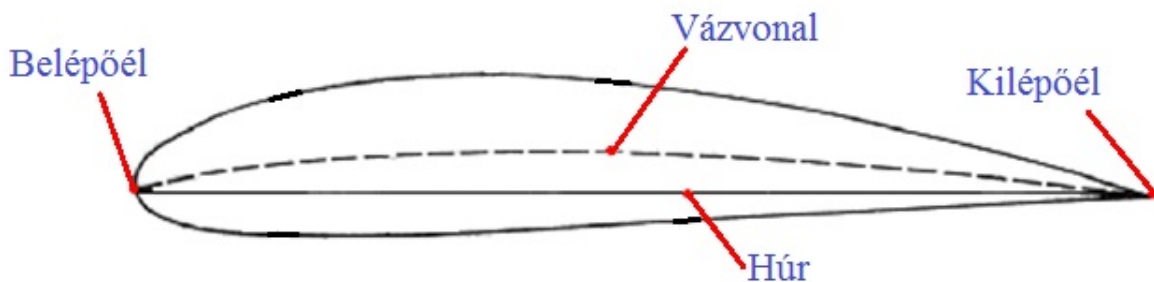


2. ábra Repülőgép félszárny sematikus rajza

A szárny további fontos geometriai jellemzői az  $S$  szárnyfelület, a  $\lambda$  szárnykarcsúság, az  $AR$  trapézviszony (aspect ratio) és a  $KAH$  közepes aerodinamikai húr hossz:

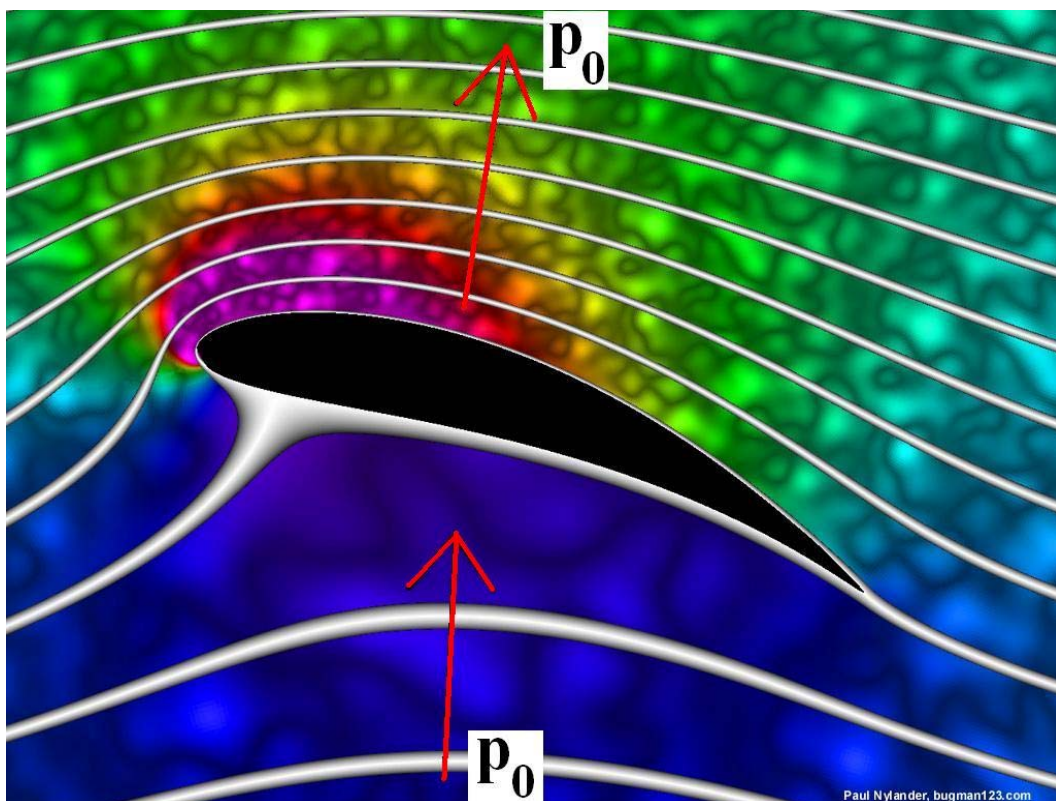
$$S = 2 \int_0^{b/2} c dy \rightarrow b \cdot \frac{c_t + c_r}{2} \quad \lambda = \frac{c_t}{c_r} \quad AR = \frac{b^2}{S} \quad KAH = \bar{c} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c^2 dy$$

A szárnyfelület esetében közelítőleg a 2. ábrán megadott szárny felületének számítási képlete is szerepel. Hasonló módon jellemezhető a repülőgép vezérsíkjainak geometriája is. A repülőgép szárnya úgynevezett szárnyprofilok sorozataként épül fel, de általában a profil húr hossza (például tő és vég) és alakja is változik a szárny mentén. Egy tipikus szárnyprofil geometria látható a 3. ábrán, a legfontosabb részek megnevezésével.



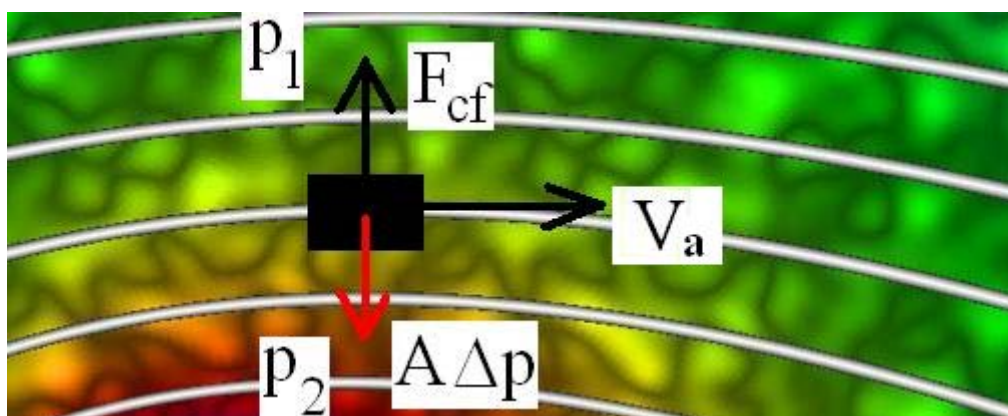
3. ábra Egy tipikus szárnyprofil (eredeti kép forrása: Internet)

A 3. ábrán egy aszimmetrikus profil látható, repülőgép szárnyakon ezek használata a leggyakoribb. Léteznek szimmetrikus profilok is, amikor a vázvonal egybeesik a húrral (a függőleges vezérsík mindig szimmetrikus profil, a vízszintes vezérsík típusonként változó). A repülőgép felemelkedéséhez és levegőben maradásához egy a levegőhöz képesti sebesség megléte szükséges. Ezzel a sebességgel mozog a szárnyprofil az álló (vagy mozgó) levegőhöz képest. A mozgó szárnyprofil a levegő kénytelen megkerülni, így alakul ki a profil körüli áramlási kép (lásd 4. ábra).



4. ábra Jellegetes szárnyprofil körüli áramlási kép (eredeti kép forrása: Internet)

A repülőgép levegőbe emelése és fennmaradása ennek az áramlási képnek a következménye. Bármely áramlási kép felrajzolható az áramló közeg egyes elhatárolt részeinek pályáját végigkövetve. Egy-egy ilyen pályát áramvonalnak nevezünk. A gépet a levegőben tartó felhajtóerő keletkezésének megértéséhez tekintsünk egy íves áramvonal mentén  $V_a$  sebességgel haladó levegő (közeg) részt (lásd 5. ábra). Itt jegyezzük meg, hogy az áramlás szempontjából mindegy, hogy a közeg mozog a szárnyprofilhoz, vagy a szárnyprofil a közeghez képest. Az áramvonalakra merőleges irányban a  $dm$  tömegű elhatárolt közegrészre  $F_{cf}$  nagyságú centrifugális erő hat. Definíció szerint a közegrész azonban nem hagyhatja el az áramvonalat, ezért a centrifugális erőt valahogy ellensúlyozni kell. A szükséges ellensúlyozó erőt a közegrész feletti és alatti nyomások különbsége adja a közegrész  $A$  felületén keresztül ( $F_{cf} = A \cdot \Delta p$ ). Ebből következően az íves áramvonal külső oldalán nagyobb a nyomás, mint a belsőn.



5. ábra Íves áramvonal mentén haladó közegrész (eredeti kép forrása: Internet)

Vegyük most figyelembe a 4. ábrán a szárnyprofil körüli áramlási képet, az íves áramvonalra merőlegesen kialakuló nyomásviszonyokat és, hogy a levegőben (közegben) mozgó test csak egy adott térrészben képes a levegő (közeg) megzavarására. Utóbbi megállapításból belátható hogy távol a szárnyprofil alatt és távol felette a levegő állni fog és normál légköri nyomás ( $p_0$ ) fog uralkodni. Az íves áramvonalak mentén kifelé azonban a nyomásnak nőnie kell. Ez azt jelenti, hogy a 4. ábrán a szárnyprofil alatt a  $p_0$  légköri nyomásnál nagyobb, felette pedig kisebb nyomás alakul ki. Ez a nyomáskülönbség adja a szárnyprofilra ható felhajtóerőt, ami a repülőgépet levegőbe emeli, és ott is tartja. A profil körüli nyomáseloszlás azonban nem csak a profilt emelő erőt, hanem annak mozgását akadályozó erőt (ellenállás) és a profilt forgatni törekvő nyomatékot is eredményez.

Hasonló elven keletkeznek erők és nyomatékok a teljes szárnyon és a vezérsíkokon is. A kormányfelületek kitérítése az áramlási kép megváltoztatásán keresztül változtatja meg az erőket és nyomatékokat.

A repülőgépek mozgásának jellemzéséhez persze a teljes repülőgépre ható eredő erők és nyomatékok meghatározása szükséges figyelembe véve még a törzs hatását is.

Az eredő erőket és nyomatékokat többféle koordináta-rendszerben lehetséges jellemezni. Az aerodinamikában használatos módon a stabilitási koordináta rendszerben felhajtóerőt, ellenálláserőt és oldalerőt definiálnak. Ugyanakkor a repülőgép mozgásának jellemzésére a test rendszer használata a szokásos, így a felhajtóerő és az ellenálláserő vektorát a stabilitási és a test rendszer közt transzformálni szükséges.

Az erők és nyomatékok számítási képletei:

$$F_i = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot C_i$$

$$L = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot b \cdot C_l \quad M = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot \bar{c} \cdot C_m \quad N = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot b \cdot C_n$$

A képletekben  $C_i - k$  a légerő, vagy nyomatéki tényezők. A nyomatéki komponensek a stabilitási és test rendszerben teljesen azonosak, így nem szükséges transzformálni őket. A képletekben  $\rho$  a levegősűrűség.

A légerőknél az  $i$  index értékei stabilitási rendszerben rendre:

1. L: felhajtóerő (lift force) (általában negatív)
2. D: ellenálláserő (drag force) (általában negatív)
3. Y: oldalerő

Test rendszerben pedig:

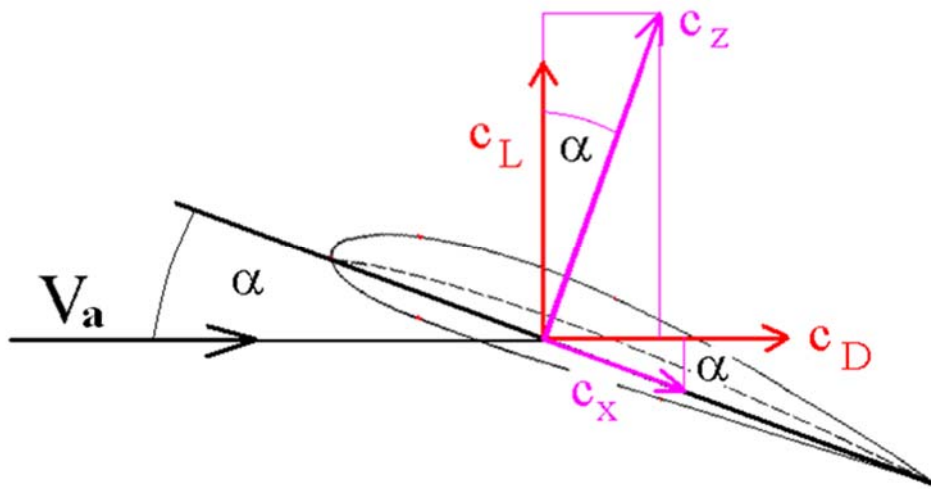
1. X
2. Y
3. Z

A két rendszer közti transzformáció az alábbi módon tehető meg (lásd 6. ábra)

$$C_X = -C_L \sin \alpha + C_D \cos \alpha$$

$$C_Y = C_Y$$

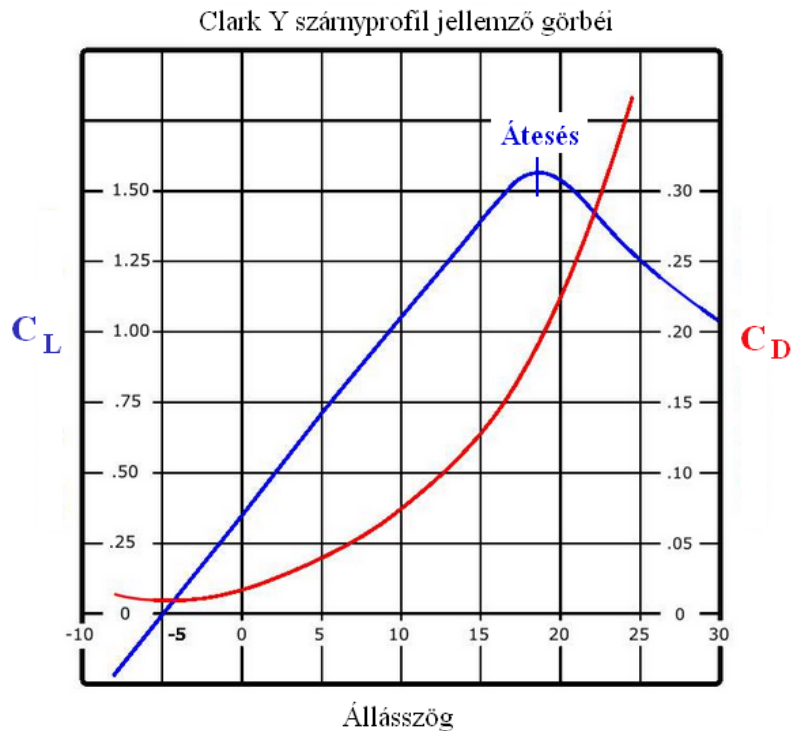
$$C_Z = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha$$



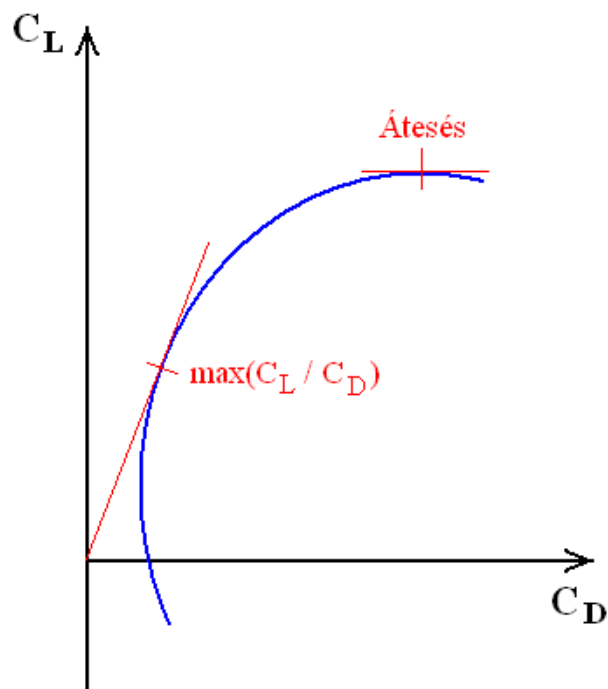
6. ábra Légerő tényezők stabilitási és test rendszerben

A légerő és nyomatéki tényezők az állásszög, a csúszási szög, a kormányfelület kitérések, a Mach szám (levegőhöz képesti sebesség és helyi hangsebesség hányadosa) és még egyéb tényezők függvényei lehetnek.

A 7. ábrán egy szárnyprofil felhajtóerő tényező – állásszög és ellenálláserő tényező – állásszög függvényei láthatók az átesési ponttal együtt. Áteséskor egy adott állásszög elérése után az áramlás leválik a profilról és a felhajtóerő hirtelen drasztikusan lecsökken az eddigi növekedéssel szemben (bővebben lásd: [7]). Ez egy veszélyes jelenség, mely sok katasztrófához vezetett már és ezért mindenképpen kerülendő (állásszög korlátozó szabállyal például).



7. ábra Egy szárnyprofil jellemző görbéi (eredeti kép forrása: <http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>)



8. ábra Szárnyprofil polár görbéje (polárisa)

A 7. ábrán látható két görbe összetartozó pontjait egy diagramba rajzolva kapjuk a szárnyprofil (vagy szárny, vagy repülőgép) polárisát. Erre látható egy példa a 8. ábrán az átesési ponttal és a legnagyobb meredekségű érintővel együtt. Ez utóbbi pont a maximális (felhajtóerő / ellenállás) hányadost adja, ami a repülőgép optimális üzemiállapota. A repülőgép siklószáma ebben a pontban maximális (lásd [7]). Végül a légerők és nyomatékok számítására álljon itt egy számpélda.

### Kisrepülőgép egy üzemállapotának közelítő számítása

A mintaként tekintett Cessna 175 Skylark típusú repülőgépet a 9. ábra mutatja. A repülőgép leírásából ([http://en.wikipedia.org/wiki/Cessna\\_175\\_Skylark](http://en.wikipedia.org/wiki/Cessna_175_Skylark)) sok más adat mellett kiderül, hogy szárnyprofilja NACA 2412. Ennek a profilnak a karakterisztikái több forrásban is megtalálhatók. A szárnyprofil jellemzőket közelítőleg tekinthetjük a repülőgép jellemzőinek, bár a teljes repülőgépre ható felhajtóerő általában kisebb, az ellenálláserő pedig nagyobb, mint a profilé. A NACA 2412 profil számított karakterisztikáit a 10. ábra szemlélteti.

A feladat legyen 3000 m repülési magasságban, 5 fok állásszögön, vízszintes repülésben, a levegőben maradáshoz szükséges repülési sebesség és vonóerő kiszámítása.

A repülőgép legfontosabb alap adatai:

Tömeg:  $m=1000 \text{ kg}$   
Szárnyfelület:  $S=16,07 \text{ m}^2$   
Maximális sebesség:  $V_{max}=238 \text{ km/h}$



9. ábra Cessna 175 Skylark repülőgép (forrás: <http://www.publicdomainpictures.net/>)

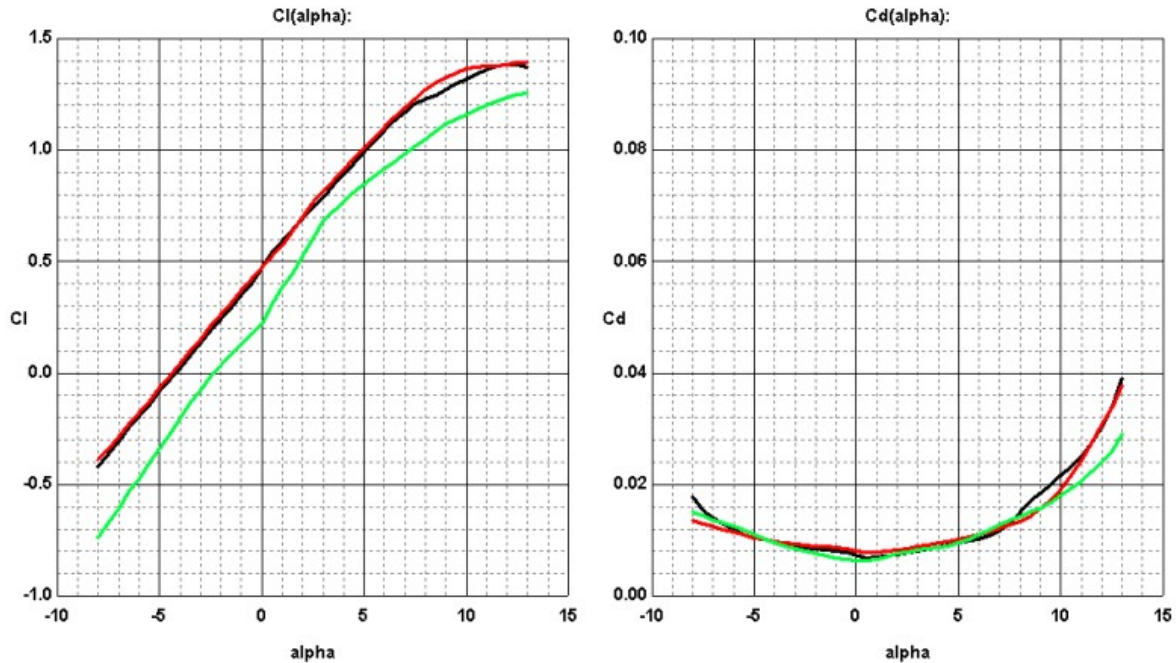
Vízszintes, egyenes vonalú ( $\phi=0^\circ$ ,  $\theta=0^\circ$ ) repülésben a Föld gravitációs ereje a test koordinátarendszer Z tengelye irányában hat, így a Z irányú légerőnek kell kiegyenlítenie. A motor (vonóerő) tengelye az X tengellyel egyirányúnak vehető. Összességében a Z és X tengely irányú légerők számítási képleteire van szükségünk:

$$F_Z = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot C_Z \quad F_X = \frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot C_X$$

A 10. ábra megmutatja a felhajtóerő és ellenállás tényezők értékeit 5 fokos állásszögön:

$$\alpha = 5^\circ \quad c_L = -0,85 \quad c_D = -0,01$$

— 'NACA4412' at 500000 Re - Mach=0.0000 - NCrit=9.00  
 — 'NACA4415' at 500000 Re - Mach=0.0000 - NCrit=9.00  
 — 'NACA2412' at 500000 Re - Mach=0.0000 - NCrit=9.00



Page 2 of 3 - Drawn by Profil 2.24 on data processed by XFOIL - Copyright (C) 1995-2009 - All rights reserved.

10. ábra NACA 2412 szárnyprofil számított karakterisztikái (forrás: <http://www.homebuiltairplanes.com/>)

A negatív előjelek a stabilitási rendszerben való előjel helyesség miatt szükségesek. A test rendszerben a Z és X tengely irányú erőtenyezők így a következők:

$$C_Z = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha = -0,8459$$

$$C_X = -C_L \sin \alpha + C_D \cos \alpha = -0,084$$

3000 m magasságban a levegő sűrűsége a Nemzetközi Egyezményes Légkör (NEL) szerint  $\rho = 0,9047 \text{ kg/m}^3$

A Z irányú erőt a repülőre ható gravitációs erővel egyenlővé téve a szükséges repülési sebesség meghatározható:

$$m \cdot g = 1000 \cdot 9,81 = 9810 = -F_Z = -\frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot C_Z = 6,149 V_a^2 \rightarrow V_a = 40 \text{ m/s} = 144 \text{ km/h}$$

A kiadódó érték a megengedett határ alatt van, így elfogadható. A sebesség fenntartásához szükséges vonóerő az X irányú erőegyensúlyból számítható:

$$T = -F_X = -\frac{\rho}{2} V_a^2 \cdot S \cdot C_X = 977 \text{ N}$$



## **Felhasznált és ajánlott irodalom**

- [1] Bokor József, Gáspár Péter: *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal*, Typotex kiadó, Budapest, 2008.
- [2] Bauer Péter: *Repülőgépek egyszerű referencijel követő szabályzóinak tervezése LQ Servo módszerrel*, Matlab/Simulink környezetben, BME Közlekedésautomatikai Tanszék, 2009.  
(url:  
[http://www.kjit.bme.hu/images/stories/targyak/automatikus\\_fedelzeti/lq\\_servo\\_tervezes.pdf](http://www.kjit.bme.hu/images/stories/targyak/automatikus_fedelzeti/lq_servo_tervezes.pdf))
- [3] Lantos Béla: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése, egyváltozós szabályozások*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2005.
- [4] Prof. Bokor József és szerzőtársai: *Irányítástechnika gyakorlatok*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.
- [5] Randal W. Beard, Timothy W. McLain: *Small Unmanned Aircraft, Theory and Practice*, Princeton University Press, 2012.
- [6] Scott Gleason, Demoz Gebre-Egziabher: *GNSS Applications and Methods*, Artech House, 2009.
- [7] Rohács József, Gausz Zsanna, Gausz Tamás: *Repülésmechanika, egyetemi jegyzet*, Typotex kiadó 2012. ([www.tankonyvtar.hu](http://www.tankonyvtar.hu))
- [8]  $\mu$ BLOX: Datum Transformations of GPS Positions, Application Note, 5th July 1999.
- [9] Guowei Chai, Ben M. Chen and Tong Heng Lee: *Unmanned Rotorcraft Systems*, Advances in Industrial Control, Springer, London, 2011.