Merev testként jellemzett légieszközök nemlineáris mozgásegyenletei: deriválás forgó rendszerben, impulzus és perdület tételek, mozgásegyenletek

Dr. Bauer Péter
BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék
2015.

Egy merev testként jellemzett légieszköznek 6 szabadságfoka van, melyek a 3 irányú elmozdulást és 3 tengely körüli szögelfordulást jelentik. Így pillanatnyi mozgásállapotát a 3 irányú sebesség és szögsebesség komponensek megadása már egyértelműen jellemzi. A teljes mozgás leírásához persze még szükséges a pillanatnyi pozíció és orientáció megadása is.
A fent felsorolt mennyiségek (pozíció, sebesség stb.) matematikailag csak egy választott koordinátarendszerhez képest írhatók le, ezért szükséges az alkalmazott koordinátarendszer(ek) megválasztása.
A nemlineáris mozgásegyenletek legkönnyebben a repülőgép (légieszköz) törzséhez kötött test rendszerre vonatkozóan vezethetők le. Ha a légieszköz legfeljebb pár kilométert tesz meg a repülése során, akkor a test rendszer mozgását elegendő az inerciarendszernek tekintett NED rendszerhez képest leírni. A test (X_B, Y_B, Z_B) és föld (NED, X_E, Y_E, Z_E) rendszereket a *Koordináta rendszerek és transzformációk* segédlet mutatja be.

A test rendszer (a légieszköz) haladó és forgó mozgást végez a föld rendszerhez képest, így a forgó rendszerben való deriválás operátorát kell alkalmazni, ami egy relatív és egy szállító részből áll. A relatív rész adja meg a vektor forgó rendszerhez képest való megváltozását, a szállító pedig a forgásból eredő megváltozást ($\underline{\omega}$ a rendszer forgási szögsebessége).

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\ )}_{\text{abszolút}} = \underbrace{\frac{\delta}{\delta t}(\ )}_{\text{relatív}} + \underbrace{\underline{\omega}\times(\ )}_{\text{szállító}} \tag{1}$$

A 6 szabadságfokú merev testként modellezett repülőgép mozgásegyenletei a forgó rendszerben az impulzus- és perdület tételek alkalmazásával vezethetők le.

Az impulzus tétel alakja:

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\left(m\underline{V}\right) \tag{2}$$

Ahol $\underline{F}$ a testre ható erők vektora, m a test tömege és $\underline{V}$ a test sebességvektora.

A perdülettétel alakja:

$$\underline{M} = \frac{d}{dt}\underline{\pi} = \frac{d}{dt}\left(J\underline{\omega}\right) \quad J = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ahol $\underline{M}$ a testre ható nyomatékok vektora, $\underline{\pi}$ a test perdületvektora, amit a *J* inercia mátrixból és az $\underline{\omega}$ szögsebesség vektorból képezhetünk. A J inercia mátrix felírásánál figyelembe vettük, hogy a légieszköz hossztengelye általában szimmetria tengelynek tekinthető, így egyes tengelypárra vett tehetetlenségi nyomatékok zérus értékűek.

Először repülőgép, majd egy négyrotoros helikopter síkbeli dinamika mozgásegyenleteit írjuk fel.

Az impulzus tétel esetünkben a repülőgépre felírt alakja:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + T_{BE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{F_T} = m\left(\frac{\delta \underline{V}}{\delta t} + \underline{\omega} \times \underline{V} \right) \tag{4}$$

Itt F_X, F_Y, F_Z a repülőgépre a test rendszer tengelyei mentén ható légerők, g a gravitációs konstans, T_{BE} a föld rendszerből a test rendszerbe vivő forgatási transzformáció mátrixa, T a csak a test rendszer x tengelye mentén ható tolóerő.

A perdület tétel pedig:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} + M_T + M_g = J \frac{\delta \underline{\omega}}{\delta t} + \underline{\omega} \times (J \underline{\omega}) = J \frac{\delta \underline{\omega}}{\delta t} + \Omega J \underline{\omega} \tag{5}$$

Itt L, M és N a test rendszer tengelyeire a légerőkből ható nyomatékok, Ω pedig az $\underline{\omega} \times$ vektori szorzás mátrix reprezentációja. A hajtómű vonó (toló) erejéből származó M_T és a forgásából származó M_g nyomatékokat a továbbiakban az egyszerűség kedvéért zérusnak tekintjük.

Az u, v, w sebesség és a p, q, r szögsebesség komponenseket figyelembe véve és a két egyenletrendszert egyesítve a 6 szabadságfokú repülőgép mozgásegyenlet rendszere:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -m\Omega \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega J \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} +$$

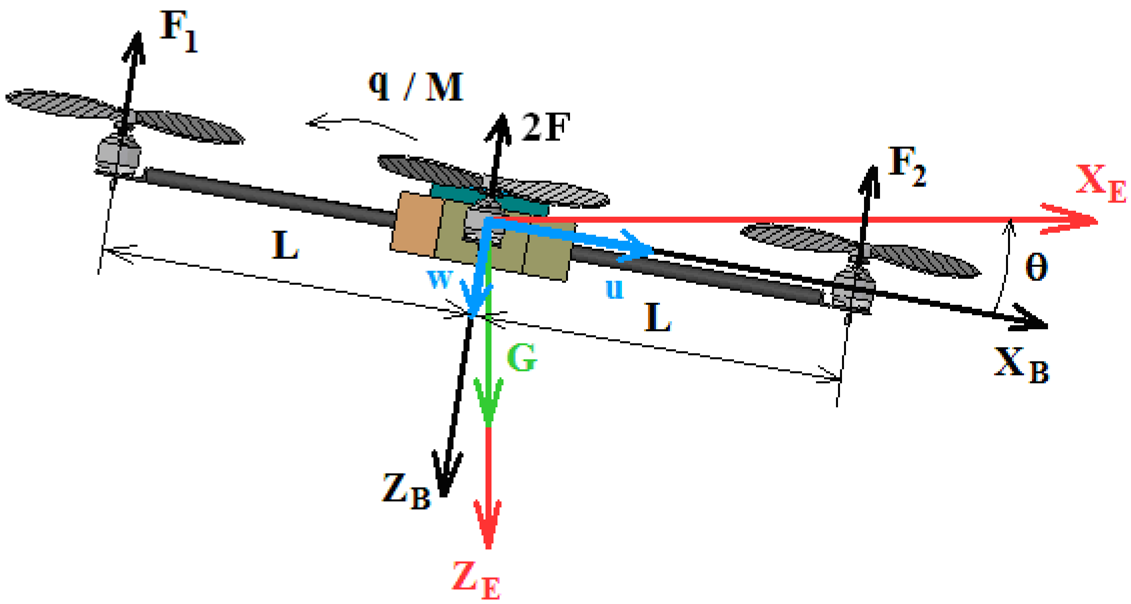
$$+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + T_{EB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

A rendszer teljes megadásához szükséges a pillanatnyi sebesség és szögsebesség értékeknek, a repülőgép tömeg és inercia adatainak, a pillanatnyi légerőknek és nyomatékoknak, a gép orientációjának és a hajtómű tolóerejének az ismerete.

A megadott egyenletrendszerből a sebességek és szögsebességek deriváltjai a bal oldali együttható mátrix inverzével való átszorzás útján nyerhetők. Így egy elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet rendszer adódik. A nemlinearitást elsődlegesen a $-m\Omega V$, $-\Omega J\omega$ tagok adják, de a légerők, nyomatékok és a tolóerő is lehet a sebesség és szögsebesség értékek függvénye.

Négyrotoros helikopter síkbeli dinamikája

Négyrotoros helikopter oldalnézetét ábrázolja a 1. ábra.



1. ábra Négyrotoros helikopter oldalnézete

Itt (X_E, Z_E) a föld, (X_B, Z_B) pedig a test koordináta rendszerek. A mozgásegyenletek felírásához az impulzus tételt az X és Z tengelyek mentén, a perdület tételt pedig az Y tengelyre vonatkozóan szükséges felírni test rendszerben. Az impulzus tétel két egyenlete:

$$m\dot{u} = -mg \cdot \sin\theta - c_x u^2$$

$$m\dot{w} = mg \cdot \cos\theta - c_z w^2 + F_1 + F_2 + 2F$$

Itt *m* a helikopter tömege, *g* a gravitációs konstans, *θ* a helikopter bólintási szöge (felfelé pozitív), c_x c_z a tengelyek menti ellenállás tényezők, melyek már a helikopter homlokfelület és a levegősűrűség hatását is tartalmazzák, *u, w* a sebességkomponensek, F F_1 F_2 pedig a légcsavarokból a helikopterre ható erők. F_1 F_2 azért különülnek el a másik két légcsavar *F* erejétől, mert a helikopter bólintó mozgásához ezek *F*-től eltérő értéke szükséges.
A perdület tétel az Y tengelyre a következő alakban írható fel:

$$I_{yy}\dot{q} = F_2 L - F_1 L - c_M \cdot q^2$$

Itt I_{yy} a helikopter Y tengelyre vonatkozó másodrendű tehetetlenségi nyomatéka, *q* a bólintó szögsebesség és c_M a homlokfelület és a levegősűrűség hatását is tartalmazó Y tengelyre vonatkozó nyomatéki tényező.
Ezzel tulajdonképpen készen van a négyrotoros helikopter nemlineáris mozgásegyenleteinek levezetése. A nemlinearitást a négyzetes tagok és a szögfüggvények mutatják.

A nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldása

A mozgásegyenletekként kiadódó elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet rendszert a legegyszerűbb numerikus szimulációval megoldani. Ha ismert a sebességek és szögsebességek kezdő értéke, a repülőgép kezdő pozíciója és orientációja, kormányfelület kitérései, a gázkar állása a hozzá tartozó vonóerővel és nyomatékokkal és a légkör jellemzői (például levegősűrűség) akkor a légerők és nyomatékok számíthatók és a teljes differenciálegyenlet rendszer felépíthető. A deriváltak ismeretében a következő időpillanatbeli sebességek és szögsebességek különféle integrál formulákkal meghatározhatók.

Legyen a repülőgép állapot vektora: $x^T = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]$ bemeneti vektora pedig $u^T = [\delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r \quad \delta_{th}]$ ekkor az állapotoktól és bemenetektől nemlineárisan függő állapot deriváltak tömören a következő egyenlettel adhatók meg:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Ahol $f(\ )$ egy nemlineáris függvény.

A differenciálegyenlet rendszer megoldásának nehézségét az adja, hogy az állapotok deriváltja függ maguktól az állapotoktól.

A megoldás legegyszerűbb módja az *Euler módszer* (téglalap szabály) mely feltételezi, hogy a derivált egy Δt időlépés alatt nem változik. Így az egymás után következő időpillanatokat az alábbi módon definiálva:

$$t_k \; t_{k+1} \; t_{k+2} \ldots, k = 0 - \infty, \quad t_{k+1} - t_k = \Delta t, \forall k$$

Egy adott időpillanatbeli állapot az előző állapotból és bemenetből a következő módon számítható:

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k)\Delta t$$

Az Euler módszerrel kapott eredmény javítható az úgynevezett Heun formulával (trapéz szabály):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})}{2}\Delta t$$

$$\bar{x}_{k+1} = x_k + f(x_k, u_k)\Delta t$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k, u_k) + f(\bar{x}_{k+1}, u_{k+1})}{2}\Delta t$$

A trapéz szabályban definíció szerint a jobb oldalon szerepel a *k+1* állapot, amit ekkor még nem ismerünk (a bemenetet ismertnek feltételezzük). Így a felírt formula csak közelítőleg oldható meg, a *k+1* állapotot Euler módszerrel előre becsülve.

A gyakorlatban a legtöbbször valamilyen szimulációs programot (pl. Matlab Simulink) használunk a mozgásegyenletek megoldására, melyben számtalan beépített megoldó módszer közül választhatunk.

Nemlineáris rendszerek linearizálása a kis megzavarások módszerével

A 6 szabadságfokú repülőgépre és a négyrotoros helikopter síkbeli modelljére levezetett mozgásegyenlet rendszerek egyaránt nemlineárisak. Az irányítástechnika módszereinek nagy része viszont csak lineáris rendszerekre alkalmazható, ezért szükséges a mozgásegyenletek linearizálása. Ezt részletesen csak a repülőgép dinamika első egyenletére írjuk fel, mert a többire hasonló módon kell.

1 Repülőgép mozgásegyenleteinek linearizálása

Először is feltesszük, hogy a nemlineáris rendszernek létezik 0 indexű paraméterekkel jellemzett úgynevezett trim állapota, melyben a rendszer egyensúlyban van (sebesség és szögsebesség deriváltja egyaránt 0). Egy nemlineáris rendszerre általában több ilyen állapot is létezik.
Ezt követően vesszük a jellemzők trim pont körüli kis megváltozásait, és ezeket behelyettesítjük az adott egyenletbe. Az egyensúlyi pont 0-ra vezető egyenletét figyelembe véve és a másodrendűen kicsiny tagokat elhagyva kapjuk végül a kis megzavarásokkal linearizált mozgásegyenletet, mely a trim pont körüli változásokat írja csak jól le.

$$
\begin{aligned}
&m\dot{u} = m \cdot r \cdot v - m \cdot q \cdot w + F_x + G_x + T \\
&u = u_0 + \Delta u \quad v = v_0 + \Delta v \quad w = w_0 + \Delta w \\
&r = r_0 + \Delta r \quad q = q_0 + \Delta q \\
&F_x = F_{x0} + \Delta F_x \quad G_x = G_{x0} + \Delta G_x \quad T = T_0 + \Delta T \\
&m\Delta\dot{u} = m(r_0 + \Delta r)(v_0 + \Delta v) - m(q_0 + \Delta q)(w_0 + \Delta w) + \\
&+ F_{x0} + \Delta F_x + G_{x0} + \Delta G_x + T_0 + \Delta T \\
&0 = mr_0 v_0 - mq_0 w_0 + F_{x0} + G_{x0} + T_0 \quad \text{egyensúlyi pont} \\
&m\Delta\dot{u} = mr_0\Delta v + mv_0\Delta r - mq_0\Delta w - mw_0\Delta q + \\
&+ \Delta F_x + \Delta G_x + \Delta T
\end{aligned}
$$

Az Irányítástechnika tárgyakban jól megszokott $\dot{x} = Ax + Bu$ állapotdinamikai egyenlet tulajdonképpen mindig egy ilyen trim pont környezetében linearizált rendszer viselkedését írja le, tehát $\Delta\dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$ alakúnak tekintendő (a vektorok aláhúzással jelölését irányításelméletben nem szokták alkalmazni).
A repülőgépre vonatkozó egyenletekben a légerők és nyomatékok kis megváltozásai elsőrendű Taylor sorba fejtéssel kaphatók meg (a második erőtől kezdve már csak a függvénykapcsolatokat jelölve):

$$
\begin{aligned}
&\Delta F_x = \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial u}}_{X_u}\Delta u + \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial w}}_{X_w}\Delta w + \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial \delta_e}}_{X_{\delta_e}}\Delta\delta_e \\
&\Delta F_y = f(\Delta v \quad \Delta p \quad \Delta r \quad \Delta\delta_r) \\
&\Delta F_z = f(\Delta u \quad \Delta w \quad \Delta q \quad \Delta\delta_e) \\
&\Delta L = f(\Delta v \quad \Delta p \quad \Delta r \quad \Delta\delta_r \quad \Delta\delta_a) \\
&\Delta M = f(\Delta u \quad \Delta w \quad \Delta q \quad \Delta\delta_e) \\
&\Delta N = f(\Delta v \quad \Delta p \quad \Delta r \quad \Delta\delta_r \quad \Delta\delta_a)
\end{aligned}
$$

A képletekben δ_a, δ_e és δ_r a repülőgép csűrő (aileron), magassági (elevator) és oldal (rudder) kormányának kitérését jelentik.
Végül a repülőgép dinamikájára a kis megzavarásokkal kapott hat egyenlet két csoportra osztható: longitudinális (hosszdinamikai (Lo)) és laterális (keresztdinamikai (Lat)) egyenletekre:

$$\begin{aligned}
&\text{Lo1.}\quad m\Delta\dot{u} = -mq_0\Delta w - mw_0\Delta q + \Delta F_x + \Delta G_x + \Delta T\\
&\text{Lo2.}\quad m\Delta\dot{w} = mq_0\Delta u + mu_0\Delta q + \Delta F_z + \Delta G_z\\
&\text{Lo3.}\quad I_{yy}\Delta\dot{q} = \Delta M\\
&\text{Lat1.}\quad m\Delta\dot{v} = -mu_0\Delta r + mw_0\Delta r + \Delta F_y + \Delta G_y\\
&\text{Lat2.}\quad I_{xx}\Delta\dot{p} - I_{xz}\Delta\dot{r} = \Delta L\\
&\text{Lat3.}\quad I_{zz}\Delta\dot{r} - I_{xz}\Delta\dot{p} = \Delta N
\end{aligned}$$

A hosszdinamikai egyenletek a repülőgép test rendszer X-Z (függőleges) síkjában való mozgását írják le. Ezekben az *u*, *w* sebesség komponensek, a *q* bólintó szögsebesség és a δ_e, δ_{th} magassági kormány és gázkar bemenetek szerepelnek (utóbbiak a légerőkön, nyomatékon és a tolóerőn keresztül).
A keresztdinamikai egyenletek az X-Z síkból 'kilógó' mozgásokat írják le a *v* sebességgel, a *p* orsózó és *r* legyező szögsebességekkel δ_a, δ_r csűrő és oldalkormány bemenetekkel.

Longitudinális linearizált egyenletek

A légerők, a nyomaték és a gravitációs vektor Taylor sorfejtését és a θ bólintási szög egyszerűsített dinamikáját figyelembe véve a repülőgép hosszdinamikai mozgásegyenletei állapotteres alakban (a gázkar pozíció helyett a tolóerő megváltozását tekintve bemenetnek):

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{u}\\ \Delta\dot{w}\\ \Delta\dot{q}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial q} - w_0 & -\cos\theta_0\cdot g\\
\frac{1}{m}\frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_z}{\partial w} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_z}{\partial q} + u_0 & -\sin\theta_0\cdot g\\
\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial u} & \frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial w} & \frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial q} & 0\\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta w\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial \delta_e} & 1\\
\frac{1}{m}\frac{\partial F_z}{\partial \delta_e} & 0\\
\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial \delta_e} & 0\\
0 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_e\\ \Delta T\end{bmatrix}$$

Laterális linearizált egyenletek

A laterális dinamika Lat2 és Lat3 egyenleteiben mindkét szögsebesség deriváltja szerepel. A külön-külön egyenletek az alábbi transzformáció útján kaphatók meg:

$$\begin{aligned}I_{xx}\Delta\dot{p} - I_{xz}\Delta\dot{r} = \Delta L\\ I_{zz}\Delta\dot{r} - I_{xz}\Delta\dot{p} = \Delta N\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\Delta\dot{p}\\ \Delta\dot{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_1 & I_2\\ I_2 & I_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta L\\ \Delta N\end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{-I_{zz}}{-I_{xx}I_{zz} + I_{xz}^2}\quad I_2 = \frac{-I_{xz}}{-I_{xx}I_{zz} + I_{xz}^2}\quad I_3 = \frac{-I_{xx}}{-I_{xx}I_{zz} + I_{xz}^2}$$

A légerők, a nyomaték és a gravitációs vektor Taylor sorfejtését és a ϕ bedöntési és ψ azimut szögek közelítő dinamikáját figyelembe véve a repülőgép keresztdinamikai mozgásegyenletei állapotteres alakban:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{v}\\ \Delta\dot{p}\\ \Delta\dot{r}\\ \Delta\dot{\phi}\\ \Delta\dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial v} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial p}+w_0 & \frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial r}-u_0 & g\cos\theta_0 & 0\\ I_1\frac{\partial L}{\partial v}+I_2\frac{\partial N}{\partial v} & I_1\frac{\partial L}{\partial p}+I_2\frac{\partial N}{\partial p} & I_1\frac{\partial L}{\partial r}+I_2\frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0\\ I_2\frac{\partial L}{\partial v}+I_3\frac{\partial N}{\partial v} & I_2\frac{\partial L}{\partial p}+I_3\frac{\partial N}{\partial p} & I_2\frac{\partial L}{\partial r}+I_3\frac{\partial N}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & 1 & tg\theta_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos\theta_0} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta v\\ \Delta p\\ \Delta r\\ \Delta\phi\\ \Delta\psi\end{bmatrix}+ \quad (11a)$$

$$+\begin{bmatrix}\frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial\delta_r} & \frac{1}{m}\frac{\partial F_y}{\partial\delta_a}\\ I_1\frac{\partial L}{\partial\delta_r}+I_2\frac{\partial N}{\partial\delta_r} & I_1\frac{\partial L}{\partial\delta_a}+I_2\frac{\partial N}{\partial\delta_a}\\ I_2\frac{\partial L}{\partial\delta_r}+I_3\frac{\partial N}{\partial\delta_r} & I_2\frac{\partial L}{\partial\delta_a}+I_3\frac{\partial N}{\partial\delta_a}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_r\\ \Delta\delta_a\end{bmatrix} \quad (11b)$$

Ezek az egyenletek már az irányítástechnikában megszokott állapotdinamikai egyenlet alakjában vannak:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

2 Négyrotoros helikopter mozgásegyenleteinek linearizálása

Négyrotoros helikopter bólintó dinamikája az alábbi nemlineáris mozgásegyenlet rendszerrel írható le:

$$m\dot{u} = -mg\cdot\sin\theta - c_x u^2$$

$$m\dot{w} = mg\cdot\cos\theta - c_z w^2 + F_1 + F_2 + 2F$$

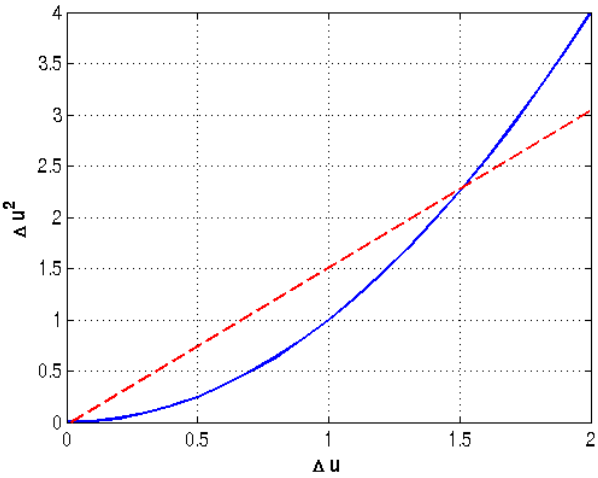
$$I_{yy}\dot{q} = F_2 L - F_1 L - c_M\cdot q^2$$

Az egyensúlyi pontban, azaz lebegésben minden mozgásjellemző nulla: $u_0 = 0 \quad w_0 = 0 \quad q_0 = 0 \quad \theta_0 = 0$ és a négy rotor ereje a helikopterre ható gravitációs erővel tart egyensúlyt: $mg = 4F \rightarrow F_{1_0} = F \quad F_{2_0} = F$

A kis megzavarások módszerének alkalmazása itt a négyzetes sebességi tagokra az alábbi eredményt adja:

$$(u_0 + \Delta u)^2 = u_0^2 + 2u_0\Delta u + \Delta u^2$$

Ebből a másodrendűen kicsiny tagot elhagyva és az egyensúlyi sebességet figyelembe véve teljesen zérus érték adódik, ami fizikailag nem megengedhető, mert elhanyagolja a teljes légellenállást (vagy annak nyomatékát a harmadik egyenletben). Így a linearizált modell bármekkora bemenő erő, vagy nyomaték változás hatására végtelen nagy sebességet, vagy szögsebességet fog produkálni. A helyes fizikai viselkedés megőrzése érdekében azért itt másfajta közelítés szükséges. A négyzetes sebesség változást felrajzolva a parabola lineáris közelítését kell megalkotni. A kiinduló pontbeli meredekség ebben az esetben nem megfelelő közelítés, mert zérus értékű. A legjobb közelítés a maximálisan lehetséges Δu sebességváltozást figyelembe véve a parabola legkisebb négyzetes lineáris közelítése a következő alakban: $\Delta u^2 = a_x \Delta u$. Ezt szemlélteti a 2. ábra. Fontos látni, hogy így kis sebességen nagyobb, nagy sebességen pedig kisebb ellenálláserőt fog adni a modellünk a valósnál.



2. ábra Egy parabola lehetséges lineáris közelítése

A nem négyzetes tagok közelítését egyszerűen beírva az alábbi linearizált egyenletrendszer adódik:

$$m\Delta\dot{u} = -mg \cdot \sin\Delta\theta - c_x a_x \Delta u$$
$$m\Delta\dot{w} = -c_z a_z \Delta w + \Delta F_1 + \Delta F_2$$
$$I_{yy}\Delta\dot{q} = \Delta F_2 L - \Delta F_1 L - c_M \cdot a_M \Delta q$$

Felhasznált és ajánlott irodalom

[1] Bokor József, Gáspár Péter: *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal*, Typotex kiadó, Budapest, 2008.

[2] Bauer Péter: *Repülőgépek egyszerű referenciajel követő szabályzóinak tervezése LQ Servo módszerrel*, Matlab/Simulink környezetben, BME Közlekedésautomatikai Tanszék, 2009. (url: http://www.kjit.bme.hu/images/stories/targyak/automatikus_fedelzeti/lq_servo_tervezes.pdf)

[3] Lantos Béla: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése, egyváltozós szabályozások*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2005.

[4] Prof. Bokor József és szerzőtársai: *Irányítástechnika gyakorlatok*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.

[5] Randal W. Beard, Timothy W. McLain: *Small Unmanned Aircraft, Theory and Practice*, Princeton University Press, 2012.

[6] Scott Gleason, Demoz Gebre-Egziabher: *GNSS Applications and Methods*, Artech House, 2009.

[7] Rohács József, Gausz Zsanna, Gausz Tamás: *Repülésmechanika, egyetemi jegyzet*, Typotex kiadó 2012. (www.tankonyvtar.hu)

[8] μBLOX: Datum Transformations of GPS Positions, Application Note, 5th July 1999.

[9] Guowei Chai, Ben M. Chen and Tong Heng Lee: *Unmanned Rotorcraft Systems*, Advances in Industrial Control, Springer, London, 2011.